PREFAȚĂ

În primăvara anului 2003 am publicat la Editura Cermi cartea „***Geometrie: curbe şi suprafeţe***”. Aceasta are la bază cursurile predate timp de mai mulţi ani studenţilor anului II de la Facultatea de Matematică a Universităţii „Al.I.Cuza” din Iaşi, în sensul că ea conţine elementele de bază parcurse de programa analitică dar şi unele noţiuni care să ofere studenţilor interesaţi o perspectivă mai amplă asupra subiectului. Intrucât această carte s-a epuizat, am decis să oferim studenţilor actuali o versiune simplificată a ei prin limitare strictă la subiectele din programa de licenţă. Aceste obiective ne-au impus o reorganizare a materialului care a constat în eliminarea unor capitole, divizarea şi completarea altor capitole. Am introdus la fiecare capitol un rezumat care să ajute pe cititor în a-şi fixa noţiunile de bază. Pentru exerciţii şi probleme trimitem la culegerea de probleme publicată de M. Crâşmăreanu (Cermi, Iaşi - 2003).

Iaşi, ianuarie 2005 **Autorul**

CAPITOLUL 0
NOȚIUNI INTRODUCTIVE

Rezumat. Se amintește noțiunea de spațiu afin Euclidian *n*-dimensional E^n, se definește diferențiabilitatea aplicațiilor de la $\mathbb{R}^k$ la E^n, noțiunea de rang pentru astfel de aplicații și se dau condiții ca ele să fie imersii, submersii sau scufundări. Se enunță teorema de inversare locală și teorema funcțiilor implicite. Funcțiile de la deschisul $U \subseteq R^k$ la $\mathbb{R}^3$ se privesc ca funcții vectoriale și se dau formulele de derivare a produsului scalar, vectorial și mixt. Pentru o funcție $\vec{r} : I \subseteq R \to \mathbb{R}^3$ se arată că $\vec{r}$ are normă constantă $\Leftrightarrow \langle \vec{r}, \vec{r}\,' \rangle = 0$, că are direcție constantă $\Leftrightarrow \vec{r}\,'$ este coliniar cu $\vec{r}$ și că $\vec{r}$ are direcția paralelă cu un plan fix $\Leftrightarrow \left(\vec{r}, \vec{r}\,', \vec{r}\,''\right) = 0$.

§1. Spațiul Euclidian E^n

1.1. Fie $\mathbb{R}$ câmpul numerelor reale și mulțimea $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times ... \times \mathbb{R}$, $n \geq 1$, număr natural, cu structura uzuală de spațiu liniar (vectorial).

Pentru două elemente (doi vectori) $x = \left(x^1, x^2, ..., x^n\right)$ și $y = \left(y^1, y^2, ..., y^n\right)$ din $\mathbb{R}^n$ se definește produsul lor scalar prin

$$\langle x, y \rangle = x^1 y^1 + x^2 y^2 + ... + x^n y^n$$

și astfel perechea $\left(\mathbb{R}^n, <,>\right)$ este un spațiu vectorial Euclidian.

Spațiul liniar $\mathbb{R}^n$ poate fi privit ca spațiu normat cu norma

$$\|x\| = \sqrt{\left(x^1\right)^2 + \left(x^2\right)^2 + ... + \left(x^n\right)^2}$$

și desigur ca spațiu metric cu metrica (distanța)

$$d(x, y) = \sqrt{\left(x^1 - y^1\right)^2 + \left(x^2 - y^2\right)^2 + ... + \left(x^n - y^n\right)^2} = \|x - y\|.$$

Pe $\mathbb{R}^n$ se consideră topologia definită de metrica *d*.

1.2. Fie V^n un spațiu liniar, real, de dimensiune finită n. Presupunem că V^n este dotat cu un produs scalar *g*, adică $g : V^n \times V^n \to \mathbb{R}$ este o aplicație biliniară, simetrică și pozitiv definită $\left(g\left(\vec{v}, \vec{v}\right) > 0 \quad \forall \vec{v} \neq 0, v \in V\right)$. Se spune că perechea $\left(V^n, g\right)$ este un spațiu vectorial Euclidian. Oricărei baze de vectori din V^n i se poate asocia, prin procedeul Gram – Schmidt, o bază ortonormată $\mathbb{B} = \left(\vec{i}_1, \vec{i}_2, ..., \vec{i}_n\right)$ în

sensul că $g\left(\vec{i}_a,\vec{i}_b\right)=0$ pentru $a\neq b$ şi $g\left(\vec{i}_a,\vec{i}_a\right)=1$ oricare ar fi indicii $a,b\in\{1,2,...,n\}$. Orice vector $\vec{v}\in V^n$ se descompune în mod unic în forma

$$\vec{v}=x^1\vec{i}_1+x^2\vec{i}_2+...+x^n\vec{i}_n$$

şi aplicația $q:V^n\to\mathbb{R}^n$ dată prin $\vec{v}\to\left(x^1,x^2,...,x^n\right)$ este izomorfism de spații liniare. Mai mult, q este izomorfism de spații vectoriale euclidiene, adică

$$g\left(\vec{u},\vec{v}\right)=\left\langle q\left(\vec{u}\right),q\left(\vec{v}\right)\right\rangle \quad \forall\vec{u},\vec{v}\in V^n .$$

Acest izomorfism ne permite identificarea lui V^n cu $\mathbb{R}^n$.

1.3. Prin spațiu euclidian E^n înțelegem o mulțime de puncte notate $A,B,C,...,M,...,P,Q,R...$ cu proprietatea că oricărei perechi ordonate de puncte (A,B) i se asociază un vector $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ dintr-un spațiu vectorial euclidian V^n astfel că

i) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}\quad\forall A,B,C\in E^n$ şi

ii) Există un punct O în E^n astfel ca aplicația $\underset{O}{t}:P\to\overrightarrow{OP}$ de la E^n la V^n este bijecție.

Spațiul vectorial euclidian V^n se numeşte spațiul director a lui E^n sau spațiul tangent la E^n în $O\in E^n$. Se verifică uşor că aplicațiile $\underset{O}{t}$ cu O variabil în E^n sunt bijecții (cf. Problemei 1). Aşadar V^n este spațiu tangent la E^n în toate punctele sale.

Fie $\mathbb{B}$ bază ortonormată în V^n. Perechea $\mathsf{R}=\{O,\mathbb{B}\}$ se numeşte reper în E^n, O se numeşte originea reperului R iar $\overrightarrow{OP}$ se numeşte vectorul de poziție al punctului P. În descompunerea

$$\overrightarrow{OP}=x^1\vec{i}_1+x^2\vec{i}_2+...+x^n\vec{i}_n,$$

numerele $\left(x^1,...x^n\right)$ se numesc coordonatele punctului P în reperul dat şi se scrie $P\left(x^1,x^2,...,x^n\right)$. Coordonatele se schimbă odată cu schimbarea reperului din E^n (vezi Problema 2). Mulțimea $\mathbb{R}^n$ poate fi privită ca spațiu euclidian având spațiu director (tangent) însăşi spațiul vectorial euclidian $\left(\mathbb{R}^n,<,>\right)$. Într-adevăr, elementelor $x=\left(x^1,x^2,...,x^n\right)$ şi $y=\left(y^1,y^2,...,y^n\right)$ le asociem vectorul $\overrightarrow{xy}=\left(y^1-x^1,y^2-x^2,...,y^n-x^n\right)$ şi are loc evident i). Alegem $O=(0,...,0)$ şi aplicația $\underset{O}{t}$ este aplicația identică $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ deci are loc şi ii).

Spațiile euclidiene E^1,E^2 şi E^3 sunt modele geometrice ale dreptei, planului şi respectiv spațiului cu trei dimensiuni.

§2. Aplicații diferențiabile de la $\mathbb{R}^k$ la E^n

Fie o aplicație $h:\mathbb{R}^k \to E^n$ prin care unui element $u\in\mathbb{R}^k$ i se asociază un punct $P=h(u)$. Dacă alegem în E^n un reper ortonormat $\mathrm{R}=\left\{O,\left(\vec{i}_1,\vec{i}_2,...,\vec{i}_n\right)\right\}$, putem descrie aplicația *h* prin aplicația $\vec{h}:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$ care asociază lui $u\in\mathbb{R}^k$ cele *n* coordonate ale vectorului $\overrightarrow{OP}$ în reperul R sau coordonatele punctului $h(u)$ în acelaşi reper, adică

$$\vec{h}:u\to\left(x^1(u),...,x^n(u)\right),\ u\in\mathbb{R}^k .$$

Funcția $\vec{h}$ defineşte *n* funcții reale $x^i:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$, $u\to x^i(u)$, $i=1,2,...,n$ numite funcții coordonate şi reciproc, oricare *n* funcții reale $\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ pot fi scrise într-o *n*-uplă ordonată obținându-se o aplicație $\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^n$.

Cu $u=\left(u^1,...,u^k\right)$, aplicația $\vec{h}$ este complet descrisă de funcțiile reale

$$\begin{cases} x^1=x^1\left(u^1,...,u^k\right)\\ x^2=x^2\left(u^1,...,u^k\right)\\ ...\\ x^n=x^n\left(u^1,...,u^k\right),\left(u^1,...,u^k\right)\in\mathbb{R}^k\end{cases}$$

Această exprimare scalară a aplicației $\vec{h}$ o vom scrie mai compact în una din următoarele forme:

$$x^i=x^i\left(u^\alpha\right)\qquad i=1,2,...,n,\ \alpha=1,2,...,k$$

$$x=x\left(u^\alpha\right)$$

$$x=x(u),\quad u\in\mathbb{R}^k,\ x\in\mathbb{R}^n.$$

Vom spune că aplicația $\vec{h}$ (echivalent $x=x(u)$) este aplicație vectorială (imaginea ei este o mulțime de vectori în $\mathbb{R}^n$).

Fie *U* o submulțime deschisă în $\mathbb{R}^k$ şi o aplicație $h:U\to E^n$ cu aplicația vectorială asociată $\vec{h}:U\to\mathbb{R}^n$, $\quad u\to\left(x^1\left(u^1,...,u^k\right),x^2\left(u^1,...,u^k\right),...,\ x^n\left(u^1,...,u^k\right)\right)$, $u=\left(u^1,...,u^k\right)\in U$.

Definiția 2.1. *Aplicația* $h: U \subseteq \mathbb{R}^k \to E^n$ *este diferențiabilă de clasă* C^s *(s ≥ 1, număr natural) dacă funcțiile reale* $x^i: U \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., n$, *au derivate parțiale continue până la ordinul s.*

Dacă *h* este de clasă C^s, putem asocia funcției vectoriale $x = x(u^\alpha)$, funcțiile vectoriale obținute prin derivare parțială

$$\frac{\partial x}{\partial u^\alpha} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^\alpha}, ..., \frac{\partial x^n}{\partial u^\alpha} \right),$$

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} = \left(\frac{\partial^1 x}{\partial u^\alpha \partial u^\beta}, ..., \frac{\partial^2 x^n}{\partial u^\alpha \partial u^\beta} \right),$$

$$\frac{\partial^3 x}{\partial u^\alpha \partial u^\beta \partial u^\gamma} = \left(\frac{\partial^3 x^1}{\partial u^\alpha \partial u^\beta \partial u^\gamma}, ..., \frac{\partial^3 x^n}{\partial u^\alpha \partial u^\beta \partial u^\gamma} \right) \text{ s.a.m.d.}$$

cu $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, ..., k$.

Unei aplicații $h: U \subseteq \mathbb{R}^k \to E^n$ diferențiabilă de clasă C^s (*s* ≥ *1*), dată prin aplicația vectorială $x = x(u^\alpha)$ i se asociază în fiecare punct *u* din *U*, matricea $J_h(u) = \left(\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \right)$, $i = 1, 2, ..., n$, $\alpha = 1, 2, ..., k$, numită matricea Jacobiană a aplicației *h*. Rangul matricii $J_h(u)$ nu depinde de reperul ales în E^n (vezi Problema 3).

i) Dacă rang $J_h(u_0) < \min\{k, n\}$, u_0 din *U* se numește punct singular pentru aplicația *h*.

ii) Fie *k* < *n*. Dacă rang $J_h(u_0) = k$, aplicația h se numește imersie în u_0. Ea se numește imersie pe *U* dacă este imersie în toate punctele lui *U*.

iii) Imersia $h: U \to \mathbb{R}^n$ se numește *scufundare* dacă este homeomorfism pe imaginea ei.

iv) Fie *k* > *n*. Dacă rang $J_h(u_0) = n$, *h* se numește submersie în $u_0 \in U$. Ea se numește submersie pe *U* dacă este submersie în toate punctele lui *U*.

Menționăm fără demonstrații două rezultate importante de Analiză matematică pe care le vom folosi mai ales în obținerea reprezentărilor analitice ale curbelor și suprafețelor.

Teorema de inversare locală. *Fie* $h: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *o aplicație diferențiabilă de clasă* C^1 *și* $u_0 \in \mathbb{R}^n$. *Dacă rang* $J_h(u_0) = n$, *atunci există o vecinătate deschisă U a lui* u_0 *așa încât* $h(U)$ *să fie mulțime deschisă în* $\mathbb{R}^n$ *și restricția lui h la U să fie difeomorfism.*

Amintim că aplicația $h : U \to h(U)$ diferențiabilă de clasă C^1 este **difeomorfism** dacă există aplicația inversă h^{-1}, diferențiabilă de clasă C^1.

Această teoremă are drept consecință faptul că dacă aplicația $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ diferențiabilă de clasă C^1 este bijectivă şi $\operatorname{rang} J_h(u) = n$, $\forall u \in \mathbb{R}^n$, atunci ea este difeomorfism.

Teorema funcțiilor implicite. *Fie dată o mulțime deschisă* $D \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^n$*, un punct* $(x_0, y_0) = (x_0^\alpha, y_0^i) \in D$ *şi aplicația* $F : D \to \mathbb{R}^k$ *dată prin relațiile* $z^\alpha = F^\alpha(x^1, ..., x^k, y^1, ..., y^n), \alpha = 1, 2, ..., k$*. Dacă*

1) $F^\alpha(x_0^1, ..., x_0^k, y_0^1, ..., y_0^n) = 0,$

2) Funcțiile reale F^α au derivatele parțiale $\dfrac{\partial F^\alpha}{\partial x\beta}$, $\dfrac{\partial F^\alpha}{\partial y^i}$, $(\alpha, \beta = 1, ..., k, i = 1, ..., n)$ continue într-o vecinătate deschisă $U \times V$ a punctului (x_0, y_0),

3) $\operatorname{rang}\left(\dfrac{\partial F^\alpha}{\partial y^i}\right) = n$,

atunci

a) există o vecinătate deschisă $U_0 \times V_0$ a punctului (x_0, y_0) şi o aplicație unică $y^i = f^i(x^1, ..., x^k)$ definită pe $U_0 \subset U$ astfel ca $y_0^i = f^i(x_0^\alpha)$ şi

$$F^\alpha(x^1, ..., x^k, f^1(x^\alpha), ..., f^i(x^\alpha)) = 0$$

oricare ar fi $(x^\alpha) = (x^1, x^2, ..., x^k) \in U_0$.

b) Funcțiile f^i au derivate parțiale de ordin 1 continue pe U_0.

c) Dacă funcțiile $F^1, ..., F^k$ sunt de clasă $C^s, s > 1$ pe $U \times V$ atunci şi funcțiile $f^1, ..., f^n$ sunt de clasă C^s pe U_0.

Fie $x = \vec{g}(u)$ si $y = \vec{h}(u)$, $u \in U \subseteq \mathbb{R}^k$ funcții vectoriale cu valori în $\mathbb{R}^n$. Aceste funcții se pot aduna şi fiecare înmulți cu un număr real, punctual şi pe componente. Mulțimea lor, cu aceste operații, formează un spațiu liniar.

Propoziția 2.1. *Dacă* $\vec{g}, \vec{h} : U \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^n$ *sunt funcții vectoriale diferențiabile de clasă* C^s *(s ≥ 1), atunci funcțiile vectoriale* $\vec{g} + \vec{h}$, $a\vec{g}$, $a \in \mathbb{R}$ *sunt diferențiabile de clasă* C^s *şi avem*

$$\frac{\partial\left(\vec{g}+\vec{h}\right)}{\partial u^{\alpha}}=\frac{\partial \vec{g}}{\partial u^{\alpha}}+\frac{\partial \vec{h}}{\partial u^{\alpha}},$$

$$\frac{\partial\left(a\vec{g}\right)}{\partial u^{\alpha}}=a\frac{\partial \vec{g}}{\partial u^{\alpha}},\ \alpha=1,...,k$$

Aceste formule se extind la derivate de ordin superior. Demonstrația este imediată.

Pentru două funcții vectoriale $\vec{g},\vec{h}:U\subseteq\mathbb{R}^{k}\to\mathbb{R}^{n}$ putem defini produsul lor scalar prin formula

$$(2.1)\qquad \left\langle\vec{g},\vec{h}\right\rangle(u)=\sum_{i=1}^{n}x^{i}(u)y^{i}(u)$$

unde prin $\left(x^{i}\right)$ si $\left(y^{i}\right)$ am notat, respectiv, coordonatele celor două funcții vectoriale. Acest produs scalar este o funcție pe *U* cu valori reale.

Vom spune că funcțiile vectoriale $\vec{g}$ şi $\vec{h}$ sunt ortogonale pe *U* dacă produsul lor scalar $\left\langle\vec{g},\vec{h}\right\rangle$ este nul pe *U*.

Propoziția 2.2. *Are loc formula de derivare a produsului scalar*

$$(2.2)\qquad \frac{\partial\left\langle\vec{g},\vec{h}\right\rangle}{\partial u^{\alpha}}=\left\langle\frac{\partial\vec{g}}{\partial u^{\alpha}},\vec{h}\right\rangle+\left\langle\vec{g},\frac{\partial\vec{h}}{\partial u^{\alpha}}\right\rangle,\ \alpha=1,2,...,k$$

Formula (2.2) este o consecință imediată a formulelor de derivare a sumei şi produsului de funcții reale de o variabilă reală.

Această formulă permite calculul, iterativ, al oricărei derivate a lui $\left\langle\vec{g},\vec{h}\right\rangle$ până la ordinul *s*. Rezultă că funcția reală $\left\langle\vec{g},\vec{h}\right\rangle$ este diferențiabilă de clasă C^{s} ($s\geq 1$).

Norma funcției vectoriale $\vec{g}:U\subseteq\mathbb{R}^{n}$ se defineşte prin $\left\|\vec{g}\right\|=\sqrt{\left\langle\vec{g},\vec{g}\right\rangle}$. Spunem că această funcție este de normă (lungime) constantă dacă $\left\|\vec{g}(u)\right\|=c\in\mathbb{R}$ pentru orice $u\in U$.

Propoziția 2.3. *Fie* $\vec{g}:U\subseteq\mathbb{R}^{k}\to\mathbb{R}^{n}$ *funcție vectorială diferențiabilă de clasă* C^{s} *($s\geq 1$) pe mulțimea U deschisă şi conexă. Condiția necesară şi suficientă ca ea să fie de normă constantă este ca să fie ortogonală pe funcțiile vectoriale* $\frac{\partial\vec{g}}{\partial u^{\alpha}}$, $\alpha=1,...,k$.

Demonstrație. Dacă funcția vectorială $\vec{g}$ este de normă constantă, adică $\langle \vec{g}, \vec{g} \rangle = c^2$, $c \in \mathbb{R}$, prin derivarea în raport cu u^α obținem $2\left\langle \vec{g}, \frac{\partial \vec{g}}{\partial u^\alpha} \right\rangle = 0$, $\alpha = 1,...k$. Reciproc, dacă au loc aceste k egalități, rezultă $\frac{\partial \left\| \vec{g} \right\|^2}{\partial u^\alpha} = 0$. Cum U este mulțime conexă, conchidem că $\left\| \vec{g} \right\|^2$ este o constantă pozitivă, q.e.d.

Considerăm $n = 3$. În această situație putem defini *produsul vectorial* a două funcții vectoriale $\vec{g}, \vec{h} : U \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^3$ prin formula

(2.3) $$\vec{g} \times \vec{h} = \left(x^2 y^3 - x^3 y^2, x^3 y^1 - x^1 y^3, x^1 y^2 - x^2 y^1 \right)$$

unde $\vec{g} = \left(x^1, x^2, x^3 \right)$, $\vec{h} = \left(y^1, y^2, y^3 \right)$.

Propoziția 2.4. *Dacă funcțiile vectoriale* $\vec{g}, \vec{h} : U \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^3$ *sunt diferențiabile de clasă* C^s *(s ≥ 1) pe U, atunci funcția vectorială* $\vec{g} \times \vec{h}$ *este diferențiabilă de clasă* C^s *pe U şi are loc formula*

(2.4) $$\frac{\partial \left(\vec{g} \times \vec{h} \right)}{\partial u^\alpha} = \frac{\partial \vec{g}}{\partial u^\alpha} \times \vec{h} + \vec{g} \times \frac{\partial \vec{h}}{\partial u^\alpha}, \ \alpha = 1,...,k$$

care permite calculul, iterativ, al derivatelor până la ordin s pentru funcția $\vec{g} \times \vec{h}$.

Afirmația se verifică lesne prin calcul.

Pe lângă funcțiile vectoriale $\vec{g}$, $\vec{h}$ să considerăm încă o funcție vectorială $\vec{f} : U \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^3$. *Produsul mixt* al funcțiilor vectoriale $\vec{g}, \vec{h}, \vec{f}$ este funcția reală

(2.5) $$\left(\vec{g}, \vec{h}, \vec{f} \right) = \left\langle \vec{g}, \vec{h} \times \vec{f} \right\rangle = \begin{vmatrix} x^1 & y^1 & z^1 \\ x^2 & y^2 & z^2 \\ x^3 & y^3 & z^3 \end{vmatrix}, \text{ unde } \vec{f} = \left(z^1, z^2, z^3 \right).$$

Din Propozițiile 2.2. şi 2.4 rezultă imediat

Propoziția 2.5. *Dacă funcțiile vectoriale* $\vec{g}, \vec{h}, \vec{f} : U \subseteq \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^3$ *sunt diferențiabile de clasă* C^s *(s ≥ 1) pe U, atunci funcția reală* $\left(\vec{g}, \vec{h}, \vec{f} \right)$ *este diferențiabilă de clasă* C^s *pe U şi are loc formula*

(2.6) $$\frac{\partial}{\partial u^\alpha} \left(\vec{g}, \vec{h}, \vec{f} \right) = \left(\frac{\partial \vec{g}}{\partial u^\alpha}, \vec{h}, \vec{f} \right) + \left(\vec{g}, \frac{\partial \vec{h}}{\partial u^\alpha}, \vec{f} \right) + \left(\vec{g}, \vec{h}, \frac{\partial \vec{f}}{\partial u^\alpha} \right), \ \alpha = 1,...,k.$$

Probleme

1. Fie E^n un spațiu euclidian.

   i) Arătați că $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$ şi $\overrightarrow{BA}=-\overrightarrow{AB}$ $\forall A,B\in E^n$.

   ii) Cu O dat ştim că aplicația $P\to\overrightarrow{OP}$ este bijecție. Arătați că oricare ar fi $O'\in E^n$, aplicația $P\to\overrightarrow{O'P}$ este de asemenea bijecție. Folosiți relația $\overrightarrow{O'P}=\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OP}$.

2. Fie în E^n reperele $\mathfrak{R}=\{O,\mathbb{B}\}$ şi $\mathfrak{R}'=\{O',\mathbb{B}'\}$ cu $\mathbb{B}'=\left(\vec{i}_1',\vec{i}_2',...,\vec{i}_n'\right)$.

Vectorii $\vec{i}_1',...\vec{i}_n'$ se exprimă în baza $\mathbb{B}$ în forma:

$$\vec{i}_1'=s_1^1\vec{i}_1+s_1^2\vec{i}_2+...+s_1^n\vec{i}_n,$$
$$\vec{i}_2'=s_2^1\vec{i}_1+s_2^2\vec{i}_2+...+s_2^n\vec{i}_n,$$
$$..........$$
$$\vec{i}_n'=s_n^1\vec{i}_1+s_n^2\vec{i}_2+...+s_n^n\vec{i}_n,$$

iar *O'* este determinat prin relația

$$\overrightarrow{OO'}=s^1\vec{i}_1+s^2\vec{i}_2+...+s^n\vec{i}_n.$$

Folosiți aceste exprimări în relația

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'P},\ \text{unde}$$
$$\overrightarrow{OP}=x^1\vec{i}_1+x^2\vec{i}_2+...+x^n\vec{i}_n\ \text{ şi}$$
$$\overrightarrow{O'P}=x'^1\vec{i}_1'+x'^2\vec{i}_2'+...+x'^n\vec{i}_n'\ \text{ pentru a obține formula}$$
$$x^i=s^i+\sum_{j=1}^n s_j^i x'^j,\quad i=1,2,...n.$$

Considerați matricile

$$S^0=\begin{bmatrix}s^1\\ s^2\\ s^n\end{bmatrix},\quad S=\begin{bmatrix}s_1^1 & s_2^1 & ... & s_n^1\\ s_1^2 & s_2^2 & ... & s_n^2\\ .... & & & \\ s_1^n & s_2^n & ... & s_n^n\end{bmatrix},\quad X=\begin{bmatrix}x^1\\ x^2\\ ...\\ x^n\end{bmatrix},\quad X'=\begin{bmatrix}x'^1\\ x'^2\\ ...\\ x'^n\end{bmatrix}$$

şi observați că relația precedentă se scrie în forma $X=S^0+SX'$.

Baza $\mathbb{B}$ este ortonormată. Arătați că această condiție implică ${}^T SS=I_n$. Prin ${}^T S$ am notat transpusa matricii S iar prin I_n am notat matricea unitate. Determinantul matricii ${}^T S$ este egal cu determinantul matricii S. Deduceți că $det(S)=\pm 1$. Arătați că relația matricială de mai sus ia şi forma $X'=\tilde{S}^0+{}^T SX$, cu $\tilde{S}^0=-{}^T SS^0$.

3. Fie funcția diferențiabilă de clasa C^s $(s\geq 1)$, $h:U\to E^n$ cu U deschisă în $\mathbb{R}^k$. Funcția vectorială asociată ei în reperul $\mathfrak{R}=\{O,\mathbb{B}\}$, $\vec{h}:U\to\mathbb{R}^n$ are funcțiile

coordonate $x^1(u),...x^n(u)$, $u\in U$ de clasă C^s. Funcția vectorială asociată lui h în reperul $\mathfrak{R}'=\{O,\mathbb{B}'\}$ are funcțiile coordonate $x'^1(u),...x'^n(u)$ date de relația matricială din Problema 2.

Arătați că şi aceste funcții coordonate sunt de clasă C^s şi că pentru derivatele de ordin 1 avem

$$\frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha}=\sum_{j=1}^{n} s_j^i\frac{\partial x'^j}{\partial u^\alpha}\ ,\quad \alpha=1,2,...,k$$

Rescrieți această ultimă relație în forma $J_h=SJ_h{}'$, unde J_h' este matricea Jacobiană a funcții vectoriale $\vec{h}'$.

Amintim că S este matrice inversabilă. Folosiți acest fapt şi relația matricială tocmai obținută pentru a arăta că rang J_h = rang J_h'. Aveți în vedere că rangul produsului a două matrici este mai mic sau egal cu cel mai mic dintre rangurile factorilor.

4. Fie I un interval deschis în $\mathbb{R}$ şi funcția vectorială $\vec{r}:I\to\mathbb{R}^3$, $t\to(x(t),y(t),z(t))$. Arătați că

i) $\vec{r}$ este funcție constantă $\Leftrightarrow \vec{r}\,'=\vec{0}$.

ii) $\vec{r}$ este funcție de normă constantă $\Leftrightarrow \left\langle \vec{r},\vec{r}\,'\right\rangle=0$.

ii) Vom spune că funcția $\vec{r}$ are direcția fixă dacă are forma $\vec{r}=\mu(t)\vec{a}$, unde $\vec{a}$ este o funcție vectorială constantă cu $\vec{a}^{\,2}=1$ (versor).

Să se arate arate că în acest caz există o funcție $\lambda:I\to\mathbb{R}$, $t\to\lambda(t)$ încât $\vec{r}\,'(t)=\lambda(t)\vec{r}\,'(t)$ şi că reciproca are loc.

Aşadar avem: funcția vectorială $t\to\vec{r}(t)$ are direcția fixă $\Leftrightarrow \vec{r}(t)\times\vec{r}\,'(t)=\vec{0}\ \ \forall t\in I$.

iii) Să presupunem că avem produsul mixt $\left(\vec{r}(t),\vec{r}\,'(t),\vec{r}\,''(t)\right)=0$.

Arătați folosind formula produsului dublu vectorial că funcția vectorială $\vec{a}=\vec{r}\times\vec{r}\,'$ are direcție fixă. Cum $\vec{r}$ este perpendicular pe $\vec{a}$ rezultă că $\vec{r}(t)$ este paralel cu toate planele perpendiculare pe $\vec{a}$.

Identificăm aceste plane şi putem spune că $\vec{r}(t)$ este paralel cu un plan (fix). Arătați că dacă $\vec{r}(t)$ este vector paralel cu un plan fix, atunci $\left\langle \vec{r},\vec{r}\,',\vec{r}\,''\right\rangle=0$.

Aşadar avem: funcția vectorială $t\to\vec{r}(t)$ este paralelă cu un plan fix dacă şi numai dacă $\left(\vec{r}(t),\vec{r}\,'(t),\vec{r}\,''(t)\right)=0$ pentru orice $t\in I$.

CAPITOLUL 1

CURBE ÎN PLAN

Rezumat. Se defineşte noţiunea de curbă plană şi se stabilesc reprezentările analitice: $\vec{r}=\vec{r}(t),\ t\in I\subseteq R$, $\vec{r}\,'(t)\neq\vec{0}, y=f(x), x\in I\subseteq\mathbb{R}$, $F(x,y)=0$ cu $F_x^2+F_y^2>0$. Se scrie ecuaţia tangentei şi normalei într-un punct în toate cele trei cazuri. Se defineşte lungimea arcului de curbă *C,* se stabileşte formula $L(C)=\int_a^b\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}dt$ şi se introduce funcţia lungime de arc ca parametru natural. Se consideră reperul Serret – Frenet format din versorii tangentei $\vec{t}$ şi normalei $\vec{n}$. Variaţia acestui reper este descrisă de formulele Serret – Frenet: $\frac{d\vec{t}}{ds}=k(s)\vec{n},\frac{d\vec{n}}{ds}=-k(s)\vec{t}$, unde $s\to k(s)$, cu s lungime de arc, este funcţia curbură. Se arată că într-o parametrizare oarecare avem $k(t)=\frac{x'(t)y''(t)-y'(t)x''(t)}{\left(x'^2(t)+y'^2(t)\right)^{3/2}}$. Cu $\theta(s)=\sphericalangle(\vec{t},\vec{i})$ se arată că are loc formula $k(s)=\frac{d\theta(s)}{ds}$. Pe baza acesteia se demonstrează că dată funcţia continuă $k:s\to k(s)$ există o infinitate de curbe pentru care *s* este lungimea de arc şi *k* este funcţia curbură. In final se dă procedeul de reprezentare grafică a curbelor plane date în forma $x=x(t), y=y(t),\ t\in I\subseteq\mathbb{R}$.

§1. Definiţii. Reprezentări analitice ale curbelor în plan

Fie un plan structurat ca spaţiu euclidian E^2 cu spaţiu director V^2, mulţimea vectorilor din acel plan. În prezenţa unui reper ortonormat $\mathrm{R}=\{O,(\vec{i},\vec{j})\}$ în E^2, unei aplicaţii $c:I\subseteq\mathbb{R}\to E^2$, unde *I* este un interval deschis în $\mathbb{R}$, i se asociază aplicaţia vectorială $\vec{r}:I\to\mathbb{R}^2$ definită prin

(1.1) $\qquad \vec{r}(t)=(x(t),y(t)),\ t\in I$,

unde funcţiile $t\to x(t),\ t\to y(t)$ sunt coordonatele punctului $c(t)$ în reperul $\mathrm{R}=\{O,(\vec{i},\vec{j})\}$ sau funcţiile coordonate ale vectorului $\overrightarrow{Oc(t)}$ în baza ortonormată (i,j), adică

(1.2) $\overrightarrow{Oc(t)} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$.

Imaginea aplicației c în E^2 corespunde noțiunii intuitive de curbă în plan: traiectoria unui mobil, urma lăsată de un spot luminos pe un ecran ş.a.. Această imagine poate fi simplă: un segment de dreaptă, un arc de cerc, o curbă “clopot” a lui Gauss, dar poate fi şi foarte complicată, cum este de exemplu o electrocardiogramă. Pentru a studia curbele complicate, trebuie mai întâi să studiem pe cele simple care se obțin când aplicația c are proprietăți convenabile din punctul de vedere al calculului diferențial. O ipoteză naturală este aceea că aplicația c este diferențiabilă de clasă $C^s\,(s \geq 1)$ sau, echivalent, aplicațiile coordonate $t \to x(t)$ şi $t \to y(t)$ sunt de clasă $C^s\,(s \geq 1)$ pe I.

Matricea Jacobiană a aplicației c este $J_c = \begin{bmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{bmatrix}$ şi deci c este imersie pe I dacă şi numai dacă

(1.3) $\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2 > 0$ pe $I \subseteq \mathbb{R}$.

Această condiție este echivalentă cu

(1.4) $\left\| \dfrac{d\vec{r}}{dt} \right\| \neq 0$ pe $\forall t \in I$.

Amintim că imersia c este scufundare dacă aplicația vectorială $\vec{r}$ este homeomorfism pe imaginea sa.

Definiția 1.1. *O submulțime C în E^2 se numeşte* ***arc elementar de curbă*** *dacă $C = c(I)$, cu I interval deschis în $\mathbb{R}$ şi aplicația c scufundare a lui I în E^2. Perchea (I,c) se numeşte parametrizare a arcului elementar C.*

Fie J un alt interval deschis din $\mathbb{R}$ şi $\varphi : J \to I,\ \tau \to t = \varphi(\tau)$ un difeomorfism, adică φ este bijecție şi $\dfrac{d\varphi}{d\tau} \neq 0,\ \forall t \in J$.

Propoziția 1.1. *Fie C un arc elementar de curbă cu parametrizarea (I,c). Atunci $\left(J, \tilde{c} = c \circ \varphi\right)$ este o nouă parametrizare a lui C.*

Demonstrație. Avem, mai întâi, $\tilde{c}(J) = c(\varphi(J)) = c(I) = C$. Prin derivare în raport cu τ a funcției vectoriale $\vec{\rho}(\tau) = \vec{r}(\varphi(\tau))$ obținem $\dfrac{d\vec{\rho}}{d\tau} = \ = \dfrac{d\vec{r}}{dt}(\varphi(\tau)) \cdot \dfrac{d\varphi}{d\tau}$

şi deci $\left\|\frac{d\vec{\rho}}{d\tau}\right\| = \left\|\frac{d\vec{r}}{dt}(\varphi(\tau))\right\|\left|\frac{d\varphi}{d\tau}\right|$. Rezultă că $\left\|\frac{d\vec{\rho}}{d\tau}\right\| \neq 0$ pe *J*, adică aplicaţia $\tilde{c}$ este imersie. Ea este chiar scufundare pentru că aplicaţia $\vec{\rho} = \vec{r} \circ \varphi : J \to \vec{\rho}(J)$ este compunerea a două homeomorfisme.■

Fie $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ cu I interval deschis, o funcţie diferenţiabilă de clasă $C^s\,(s \geq 1)$. Mulţimea $G_f = \{(x, f(x)), x \in I\}$ din plan se numeşte graficul (graful) funcţiei *f*.

Propoziţia 1.2. *Mulţimea* G_f *este un arc elementar de curbă.*

Demonstraţie. Definim $c : I \to E^2$ ca aplicaţia care asociază lui $x \in I$ punctul *P* de coordonate $(x, f(x))$ şi avem evident $G_f = c(I)$. Aplicaţia vectorială asociată aplicaţiei *c* este $x \to \vec{r}(x) = (x, f(x))$ şi funcţia vectorială $\frac{d\vec{r}}{dx} = (1, f'(x))$ are norma egală cu $\sqrt{1 + f'^2(x)} \neq 0$ pe *I*. Aşadar *c* este imersie. Aplicaţia $\vec{r} : I \to r(I)$ este evident injectivă. Ea este continuă pentru că este de clasă $C^s\,(s \geq 1)$. Inversa ei este de forma $(x, f(x)) \to x$, evident continuă. Aşadar *c* este scufundare. ■

Observaţia 1.1. În mod similar cu demonstraţia Propoziţiei 1.2 se arată că mulţimea de forma $\{(g(y), y), y \in I\}$ cu $g : I \to \mathbb{R}$ o funcţie de clasă $C^s\,(s \geq 1)$ este un arc elementar de curbă.

Există mulţimi în plan despre care intuiţia ne spune că sunt curbe dar care nu sunt arce elementare de curbă. Această situaţie a condus la

Definiţia 1.2. *Se numeşte* ***curbă*** *în plan o submulţime* $\mathbb{C}$ *a planului cu proprietatea că orice punct al ei aparţine cel puţin unui arc elementar de curbă inclus în* $\mathbb{C}$.

Această definiţie nu acoperă în totalitate noţiunea intuitivă de curbă în plan. Ea numai delimitează o clasă de curbe în plan, suficient de amplă pentru a merita să fie studiată şi care are proprietăţi interesante şi utile. Această clasă de curbe este obiectul prezentului capitol. Vom începe prin a vedea cum se reprezintă analitic, în repere ortonormate, aceste curbe.

În reperul ortonormat $\mathsf{R} = \{O, (\vec{i}, \vec{j})\}$ notat uneori şi prin Oxy, vom scrie $P(x, y)$ sau $P(\vec{r})$ pentru a indica faptul că punctul *P* din E^2 are coordonatele carteziene (x, y) sau vectorul de poziţie $\vec{r} = xi + yj$.

Teorema 1.1. *Mulțimea* $\mathbb{C}=\left\{P(r) \middle| \vec{r}=\vec{r}(t), t\in(a,b)\right.$ *cu aplicația vectorială* $t\to\vec{r}(t)$ *de clasă* C^s $(s\geq 1)$ *și cu* $\left.\vec{r}\,'(t)\neq\vec{0}$ *pe* $(a,b)\right\}$ *este o curbă în plan.*

Demonstrație. Vom arăta că orice punct din $\mathbb{C}$ aparține cel puțin unui arc elementar de curbă, conținut în $\mathbb{C}$.

Fie $P_0\left(\vec{r}_0\right)\in\mathbb{C}$ cu $\vec{r}_0=\vec{r}(t_0)$, $t_0\in(a,b)$. Aşadar $\left(x'(t_0),y'(t_0)\right)\neq 0$. Să presupunem, pentru a face o alegere, că $x'(t_0)\neq 0$. Rezultă din continuitate că $x'\neq 0$ pe $I=(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$ şi, în consecință, funcția reală $x:t\to x(t)$ definită pe *I* este strict monotonă pe *I*, deci injectivă şi, ca atare, bijecție de la *I* în $J=x(I)$. Notăm inversa ei prin $x^{-1}:x\to t=h(x)$. Mai mult, pentru că funcția reală *x* este diferențiabilă de clasă C^s şi $x'\neq 0$ pe *I*, x^{-1} este de asemenea diferențiabilă de clasă C^s. Înlocuim $t=h(x)$ în ecuația $y=y(t)$ şi obținem $y=y\left(h(x)\right)=f(x)$ cu $x\in J$, interval deschis în $\mathbb{R}$. Funcția $f:J\to\mathbb{R}$ este diferențiabilă de clasă C^s $(s\geq 1)$ pentru că este compunerea a două funcții diferențiabile de clasă C^s.

Considerăm graficul $G_f=\left\{\left(x,f(x)\right),x\in J\right\}$ al aplicației *f*. După Propoziția 1.2, acesta este un arc elementar de curbă. Punctul $P_0\in G_f$. El se obține pentru valoarea $x_0=x(t_0)$. Mulțimea G_f este inclusă în $\mathbb{C}$ pentru că este formată din punctele lui $\mathbb{C}$ date de valorile *t* din intervalul *I*. Aşadar P_0 aparține unui arc elementar de curbă conținut în $\mathbb{C}$.

În cursul demonstrației am făcut presupunerea că $x'(t_0)\neq 0$. Dacă $x'(t_0)=0$ atunci, în mod necesar, $y'(t_0)\neq 0$ şi cu acelaşi raționament arătăm că P_0 aparține unui arc elementar de forma $\left\{\left(g(y),y\right)\right\}$ cu y într-un interval deschis, conținut în $\mathbb{C}$. ■

Pe baza Teoremei 1.1, ecuația

(1.5) $$\vec{r}=\vec{r}(t),\ t\in(a,b),\ \vec{r}\,'(t)\neq 0,\ \forall t\in(a,b),$$

reprezintă analitic o curbă în plan. Această reprezentare se numeşte reprezentarea *vectorial – parametrică* a unei curbe în plan. Reprezentarea (1.5) se poate explicita în forma

(1.5)’ $$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t),\ t\in(a,b),\ x'^2(t)+y'^2(t)>0\ \forall t\in(a,b) \end{cases}$$

şi se obține aşa numita reprezentare *parametrică* a unei curbe în plan.

Fie D o mulțime deschisă în $\mathbb{R}^2$ şi o aplicație $F : D \to \mathbb{R},\ (x, y) \to F(x, y)$ diferențiabilă de clasă $C^s\ (s \geq 1)$. Vom nota derivatele parțiale ale ei prin F_x, F_y, F_{xx}, F_{xy} etc.

Teorema 1.2. *Dacă mulțimea* $\mathsf{C} = \{P(x, y) | F(x, y) = 0,$ *unde* $F : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *cu D mulțime deschisă, este o funcție diferențiabilă de clasă* $C^s\ (s \geq 1)$ *şi* $F_x^2 + F_y^2 > 0$ pe $D\}$ *este nevidă, atunci ea este o curbă în plan.*

Demonstație. Fie $P_0(x_0, y_0) \in \mathsf{C} \neq \varnothing$, adică $F(x_0, y_0) = 0$. Vom arăta că P_0 aparține cel puțin unui arc elementar de curbă conținut în C. Condiția $F_x^2(x_0, y_0) + F_y^2(x_0, y_0) > 0$ ne arată că fie $F_x^2(x_0, y_0) \neq 0$, fie $F_y^2(x_0, y_0) \neq 0$ fără a exclude posibilitatea ca ambele situații să aibă loc. Presupunem $F_y(x_0, y_0) \neq 0$. În caz contrar, avem $F_x(x_0, y_0) \neq 0$ şi se face un raționament asemănător cu cel ce urmează. Din continuitatea funcției F_y rezultă că $F_y \neq 0$ pe o mulțime deschisă D' centrată în (x_0, y_0). Printr-o eventuală micşorare a sa, putem lua D' de forma $D' = I \times J$ cu I un interval deschis centrat în x_0 şi J un interval deschis centrat în y_0. Teorema funcțiilor implicite ne spune că putem "explicita" y din ecuația $F(x, y) = 0$ cu $(x, y) \in D' \subset D$. Mai precis, există o aplicație unică $f : I \to J,\ x \to f(x)$ diferențiabilă de clasă C^s încât i) $f(x_0) = y_0$, ii) $F(x, f(x)) \equiv 0$ pe I. Mulțimea $\mathsf{C} = \{(x, f(x)), x \in I\}$ este un arc elementar de curbă conform Prop. 1.2. Egalitatea i) ne spune că acesta conține P_0 iar identitatea ii) ne arată că el este conținut în C. ■

Pe baza Teoremei 1.2, ecuația

(1.6) $$F(x, y) = 0, (x, y) \in D$$

cu D deschisă în $\mathbb{R}^2$ şi condiția $F_x^2 + F_y^2 > 0$ pe D, reprezintă analitic o curbă în plan. Această reprezentare se numeşte *reprezentare implicită* a curbei în plan.

La reprezentările analitice (1.5) şi (1.6) ale unei curbe în plan vom adăuga şi reprezentările analitice

(1.7) $$y = f(x),\ x \in (a, b)$$

sau

(1.7') $$x = g(y),\ y \in (c, d),$$

numite şi reprezentări *explicite* ale unei curbe în plan. Ecuațiile (1.7) şi (1.7') reprezintă analitic întotdeauna arce elementare de curbă în plan dar, cum acestea sunt curbe plane particulare, vom spune că ecuațiile (1.5), (1.5'), (1.6), (1.7) şi (1.7') constituie reprezentări analitice ale curbelor în plan.

Cele trei reprezentări analitice ale curbelor în plan sunt local echivalente în sensul că fiecare punct al curbei este conținut de un arc elementar de curbă pe care se poate trece de la una din oricare cele trei reprezentări la celelalte două. De exemplu, dacă curba (arc elementar) este dată prin ecuația $y = f(x),\ x \in (a,b)$, cu notația $x = t$ obținem reprezentarea parametrică

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t),\ t \in (a,b), \end{cases}$$

pentru ca $x'^2 + y'^2 = 1 + f'^2 > 0$ pe (a,b).

Cu notația $F(x, y) = y - f(x)$ obținem reprezentarea implicită

$$F(x,y) = 0 \quad (x,y) \in D = (a,b) \times (f(a), f(b))$$

pentru că

$$F_x^2 + F_y^2 = 1 + f'^2 > 0 \text{ pe } D.$$

Dacă avem curba dată parametric, în demonstrația Teoremei 1.1 am văzut cum, pentru orice punct *P*, putem găsi un arc elementar ce-l conține, de ecuație explicită (1.7) sau (1.7'). De la (1.7) sau (1.7') putem trece la (1.6). În sfârşit, dacă dispunem de reprezentarea analitică (1.6), în demonstrația Teoremei 1.2 am văzut cum pentru orice punct *P* al curbei se găseşte un arc elementar ce-l conține, de ecuație (1.7) sau (1.7') iar de la acestea se trece imediat la reprezentarea parametrică (1.5).

Funcțiile care apar în cele trei reprezentări analitice ale unei curbe în plan sunt diferențiabile de clasă $C^s\ (s \geq 1)$ pe domeniul lor de definiție. În continuare vom folosi numai adjectivul "diferențiabile" fără a mai menționa explicit clasa de diferențiabilitate. Dar vom presupune că aceasta este suficientă pentru a deriva ori de câte ori avem nevoie. În cele mai multe situații, clasa de diferențiabilitate C^3 se dovedeşte a fi suficientă.

§2. Tangentă şi normală într-un punct al unei curbe în plan

Pentru început vom descrie proprietăți punctuale (care au loc într-un punct al curbei) şi proprietăți locale (care au loc pe un arc elementar) ale curbelor în plan. De regulă, nu vom lua curba în întregime ci ne vom plasa pe un arc elementar al ei care admite toate cele trei reprezentări analitice găsite în §1. Un asemenea arc va fi notat prin *C* şi-l vom numi curbă plană, pentru simplitate.

Fie, pentru început, arcul elementar de curbă *C* dat explicit prin

(2.1) $\qquad y = f(x),\ x \in (a,b).$

Fie $P_0\left(x_0, f\left(x_0\right)\right) \in C$ şi $P_1\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$ un punct pe C "vecin" cu P_0 în sensul că $x_1 \in \left(x_0-\delta, x_0+\delta\right), \delta>0$, suficient de mic. Dreapta P_0P_1 are panta $m\left(x_1, x_0\right)=\dfrac{f\left(x_1\right)-f\left(x_0\right)}{x_1-x_0}$. Dacă fixăm x_0 rezultă $\lim\limits_{x_1 \to x_0} m\left(x_1, x_0\right)=f'\left(x_0\right)$ (limita există!).

Dreapta prin P_0, de pantă $f'\left(x_0\right)$ poate să se numească dreaptă tangentă la curbă pentru că există un arc elementar ce conţine P_0 care are în comun cu ea numai P_0. Consideraţii de Mecanică justifică, de asemenea, această denumire. Aşadar avem

Definiţia 2.1. *Fie o curbă C în plan reprezentată de ecuaţia (2.1). Dreapta prin punctul* $P_0\left(x_0, y_0\right) \in C$ *de pantă* $f'\left(x_0\right)$ *se numeşte tangentă la C în* P_0.

Observaţia 2.1. Dacă $x'(t_0)=0$, vom lua tangenta paralelă cu Oy.

Ecuaţia tangentei la *C* în P_0 este

(2.2) $$y-f\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right).$$

Fie curba *C* reprezentată parametric prin (1.5'). Ne propunem să scriem ecuaţia tangentei la curbă într-un punct $P_0\left(x_0, y_0\right)$ cu $x_0=x\left(t_0\right)$ şi $y_0=y\left(t_0\right)$, pentru care $x'\left(t_0\right) \neq 0$. După cum am văzut în demonstaţia Teoremei 1.1, pentru $t \in \left(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon\right)$ putem inversa funcţia $t \to x(t)$ şi obţinem funcţia inversă $t=t(x)$ care înlocuită în ecuaţia $y=y(t)$ ne conduce la reprezentarea explicită a unui arc elementar ce conţine punctul P_0 şi este inclus în *C* de forma $y=f(x)=y(t(x))$, unde evident $y_0=f\left(x_0\right)=y\left(t\left(x_0\right)\right)$ şi $t\left(x_0\right)=t_0$.

Pentru a folosi ecuaţia (2.2) avem nevoie de $f'\left(x_0\right)$. Prin derivare compusă în raport cu *x* în egalitatea $f(x)=y(t(x))$ obţinem $f'\left(x_0\right)=\dfrac{dy}{dt}\left(t\left(x_0\right)\right)\dfrac{dt}{dx}\left(x_0\right)$. Prin derivarea identităţii $t(x(t)) \equiv t$ în raport cu $t \in \left(t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon\right)$ obţinem $\dfrac{dt}{dx}\left(x\left(t_0\right)\right)\dfrac{dx}{dt}\left(t_0\right)=1$, deci $\dfrac{dt}{dx}\left(x_0\right)=\dfrac{1}{\dfrac{dx}{dt}\left(t_0\right)}$. Aşadar $f'\left(x_0\right)=\dfrac{y'\left(t_0\right)}{x'\left(t_0\right)}$ şi după (2.2) ecuaţia tangentei în P_0 la *C* se scrie în forma $y-y_0=\dfrac{y'\left(t_0\right)}{x'\left(t_0\right)}\left(x-x_0\right)$ sau în forma

(2.3) $$\frac{x-x\left(t_0\right)}{x'\left(t_0\right)}=\frac{y-y\left(t_0\right)}{y'\left(t_0\right)}.$$

Forma (2.3) a ecuației tangentei la C în punctul P_0 ne spune că direcția tangentei este dată de vectorul $\vec{r}\,'(t_0)=(x'(t_0),y'(t_0))$, unde $\vec{r}$ este funcția vectorială care dă reprezentarea vectorial – parametrică a curbei.

Ecuația (2.3) se mai poate scrie în forma

(2.3') $$\begin{cases} x = x(t_0)+\lambda x'(t_0) \\ y = y(t_0)+\lambda y'(t_0),\ \lambda\in\mathbb{R} \end{cases}$$

sau vectorial

(2.3'') $\vec{r}=\vec{r}(t_0)+\lambda\vec{r}\,'(t_0),\ \lambda\in\mathbb{R}$.

În sfârşit, fie curba C reprezentată implicit prin (1.6). Ne propunem să scriem ecuația tangentei la C într-un punct $P_0(x_0,y_0)\in C$. Presupunem că $F_y(x_0,y_0)\neq 0$. Există un arc elementar care conține P_0, inclus în C, reprezentat explicit în forma $y=f(x)$ cu $y_0=f(x_0)$ şi $F(x,f(x))\equiv 0$ pe I (ne referim la notațiile din demonstația Teoremei 1.2). Prin derivare în raport cu x a identității $F(x,f(x))\equiv 0$ obținem $F_x+F_yf'=0$ şi deci $f'(x_0)=-\dfrac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}$. După (2.2), ecuația tangentei la C în punctul P_0 se scrie în forma $y-y_0=-\dfrac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}(x-x_0)$ sau în forma

(2.4) $(x-x_0)F_x(x_0,y_0)+(y-y_0)F_y(x_0,y_0)=0$.

Continuăm să considerăm curba plană C şi punctul $P_0\in C$.

Definiția 2.2. *Perpendiculara pe tangenta la C în punctul P_0 se numeşte normala la curba C în P_0.*

Dacă avem pentru C reprezentarea explicită (2.1), cum panta tangentei este $f'(x_0)$, panta normalei va fi $-\dfrac{1}{f'(x_0)}$ dacă $f'(x_0)\neq 0$ sau va fi paralelă cu Oy dacă $f'(x_0)=0$ şi deci ecuația normalei în acest caz este

(2.5) $$y-f(x_0)=-\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$$

dacă $f'(x_0)\neq 0$, respectiv $x=x_0$ dacă $f'(x_0)=0$.

În cazul reprezentării parametrice, am constatat că direcția tangentei este dată de vectorul $(x'(t_0),y'(t_0))$. Direcția normalei va fi dată de un vector perpendicular pe acesta, de exemplu de vectorul $(-y'(t_0),x'(t_0))$.

Ecuația normalei este în acest caz

(2.6) $\left(x-x(t_0)\right)x'(t_0)+\left(y-y(t_0)\right)y'(t_0)=0$.

Fie acum *C* reprezentată implicit. Panta tangentei în punctul $P(x_0,y_0)\in C$ este $-\dfrac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}$. Deci panta normalei este $\dfrac{F_y(x_0,y_0)}{F_x(x_0,y_0)}$ dacă $F_x(x_0,y_0)\neq 0$ sau normala este paralelă cu Oy dacă $F_x(x_0,y_0)=0$. Ecuația normalei este în acest caz

(2.7) $(x-x_0)F_y(x_0,y_0)-(y-y_0)F_x(x_0,y_0)=0$,

respectiv $x=x_0$ dacă $F_x(x_0,y_0)=0$.

Tangenta şi normala fiind perpendiculare, pot fi luate ca axele unui sistem cartezian de coordonate cu originea în P_0, sistem de coordonate care variază odată cu punctul P_0 pe *C* adică este *mobil* pe curba *C*. Vom reveni mai târziu asupra acestei idei.

§3. Lungimea unui arc de curbă plană. Parametrizații naturale.

Fie un arc elementar de curbă plană reprezentat explicit în forma

(3.1) $y=f(x),\ x\in[a,b]$.

Considerarea intervalului închis $[a,b]$ creează probleme în definirea diferențiabilității funcției *f*. Dar se convine că *f* este diferențiabilă pe $[a,b]$ dacă există o funcție $\widetilde{f}$ diferențiabilă pe $I\supset[a,b]$ cu $\widetilde{f}\big|_{[a,b]}=f$, unde ca mai sus *I* este un interval deschis în $\mathbb{R}$.

Fie $\Delta=(a=x_0<x_1<\ldots<x_i<x_{i+1}<\ldots<x_n=b)$ o diviziune a intervalului $[a,b]$. Punctele $A=A_0(x_0,f(x_0))$, $A_1(x_1,f(x_1)),\ldots,A_i(x_i,f(x_i)),\ldots A_n(x_n,f(x_n))=B$ determină o linie poligonală înscrisă în arcul elementar $\overset{\frown}{AB}$ dat. Lungimea acestei linii poligonale este

(3.2) $l_\Delta=\sum_{i=0}^{n-1}\sqrt{\left(x_{i+1}-x_i\right)^2+\left(f(x_{i+1})-f(x_i)\right)^2}$.

Inegalitatea triunghiulară ne arată că la o rafinare a diviziunii Δ, lungimea l_Δ nu descreşte (Fig. 1).

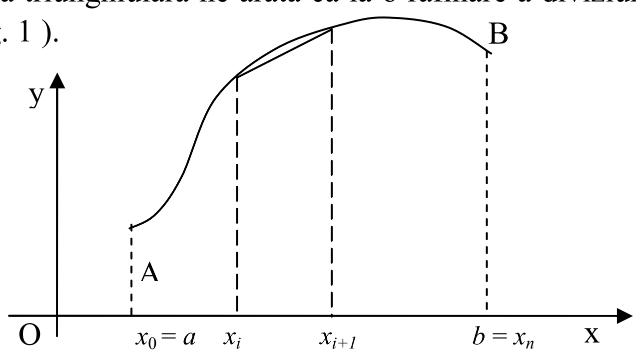

Fig. 1

Această observaţie ne atrage atenţia asupra mărginirii superioare a mulţimii $\{l_\Delta\}$ când Δ parcurge mulţimea diviziunilor lui $[a,b]$.

Definiţia 3.1. *Se spune că arcul de curbă* $\overset{\frown}{AB}$ *are* ***lungime*** *sau că este* ***rectifiabil*** *dacă mulţimea* $\{l_\Delta\}$ *este mărginită superior. Marginea superioară a acestei mulţimi se numeşte lungimea arcului* $\overset{\frown}{AB}$.

Pe baza teoremei lui Lagrange aplicată funcţiei *f* pe intervalele $[x_i, x_{i+1}]$, lungimea l_Δ se scrie în forma

$$(3.3) \qquad l_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{1 + f'^2(\xi_i)}\,(x_{i+1} - x_i),\ x_i < \xi_i < x_{i+1}$$

şi se constată că l_Δ are forma sumei Riemann pentru funcţia $\sqrt{1 + f'^2(x)}$. Integrala Riemann a acestei funcţii există dacă de exemplu f' este funcţie continuă încât avem

Teorema 3.1. *Fie arcul de curbă* $\overset{\frown}{AB}$ *reprezentat prin (3.1) cu f funcţie diferenţiabilă de clasă* C^1. *Atunci arcul de curbă* $\overset{\frown}{AB}$ *are lungime. Aceasta se calculează cu formula*

$$(3.4) \qquad l_{\overset{\frown}{AB}} = \int_a^b \sqrt{1 + f'^2(x)}\,dx\,.$$

Fie acum un arc elementar de curbă $\overset{\frown}{AB}$ în plan reprezentat parametric în forma

$$(3.5) \qquad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t),\ t \in [t_0, t_1]. \end{cases}$$

Presupunem că $x'(t) > 0$ pe $[t_0, t_1]$ şi deci funcţia $x = x(t)$ se poate inversa obţinându-se funcţia $t = h(x)$ cu $x \in [a,b]$. Înlocuind *t* în ecuaţia $y = y(t)$ obţinem reprezentarea explicită $y = f(x) = y(h(x))$ cu f diferenţiabilă. Din consideraţiile precedente, este suficient ca *f* să fie diferenţiabilă de clasă C^1 pentru ca arcul $\overset{\frown}{AB}$ să

aibă lungime. Ori *f* este astfel dacă funcțiile $t \to x(x)$ şi $t \to y(t)$ sunt diferențiabile de clasă C^1. Ne interesează o formulă de calcul a lungimii când se dă reprezentarea (3.5) a arcului $\overset{\frown}{AB}$.

Cu experiența din §2, formula (3.4) ne dă

$$l_{\overset{\frown}{AB}} = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dt}(h(x)) \frac{dh}{dx}(x) \right)^2} \, dx$$

Prin derivarea identității $x(h(x)) \equiv x$ obținem

$$x'(h(x)) \frac{dh}{dx}(x) = 1$$

sau

$$\frac{dh}{dx}(x) = \frac{1}{x'(h(x))}.$$

Deci

$$(*) \qquad l_{\overset{\frown}{AB}} = \int_a^b \sqrt{x'^2(h(x)) + y'^2(h(x))} \frac{dx}{|x'(h(x))|},$$

unde prin *x', y'* am notat derivatele acestor funcții în raport cu *t*.

În integrala obținută efectuăm schimbarea de variabilă $h(x) = t$ mai întâi în ipoteza că $x'(h(x)) > 0$ pe $[a,b]$. Avem $h(a) = t_0, h(b) = t_1$ şi $dt = \frac{dh}{dx}(x) dx = \frac{dx}{x'(h(x))}$ încât integrala devine

$$(3.6) \qquad l_{\overset{\frown}{AB}} = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} \, dt.$$

Dacă $x'(h(x)) < 0$ pe $[a,b]$ în formula (*) apare un semn minus şi o inversare a limitelor de integrare, fenomene care se anulează reciproc şi se obține aceeaşi formulă (3.6) care este formula de calcul a lungimii unui arc de curbă reprezentat parametric.

Este evident că integrala (3.4) este un caz particular al integralei (3.6) şi anume când parametrizarea arcului este de forma $\begin{cases} x = x \\ y = f(x), \ x \in [a,b]. \end{cases}$

Ele dau acelaşi rezultat, lungimea arcului $\overset{\frown}{AB}$. Observația sugerează că ar trebui să ne asigurăm că integrala din (3.6) nu depinde de parametrizarea arcului $\overset{\frown}{AB}$. Acest lucru se poate face efectuând o schimbare de parametru pe $\overset{\frown}{AB}$ (exercițiu!) dar rezultă şi direct din observația că orice parametrizare am lua pe $\overset{\frown}{AB}$, prin explicitare ajungem la aceeaşi funcție *f* din (3.1).

Continuăm să folosim reprezentarea parametrică (3.5) a arcului $\overset{\frown}{AB}$. Considerăm funcția

$$(3.7) \qquad s(t)=\int_{t_0}^{t}\sqrt{x'^2(\tau)+y'^2(\tau)}d\tau,$$

numită funcție lungime de arc.

Din $s(t_0)=0,\ s(t_1)=l_{\overset{\frown}{AB}}=L$ și $\dfrac{ds}{dt}=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}>0$ rezultă că $s:[t_0,t_1]\to[0,L]$, $t\to s(t)$ este o funcție strict monoton crescătoare, deci inversabilă cu inversa $h:[0,L]\to[t_0,t_1],\ s\to t=h(s)$. În plus, funcția *s* este diferențiabilă. Pentru că funcția *s* este bijectivă și $\dfrac{ds}{dt}\neq 0$ pe $[t_0,t_1]$, această funcție este difeomorfism.

Efectuăm schimbarea de parametru pe $\overset{\frown}{AB}$ prin înlocuirea lui *t* cu $t=h(s)$. Obținem

$$(3.8) \qquad \begin{cases} x=\tilde{x}(s)=x(h(s)) \\ y=\tilde{y}(s)=y(h(s)),\ s\in[0,L] \end{cases}.$$

Vom spune că am parametrizat arcul $\overset{\frown}{AB}$ prin lungimi de arc. Aceasta înseamnă că precizăm poziția unui punct *P* pe $\overset{\frown}{AB}$ prin indicarea lungimii arcului $\overset{\frown}{AP}$, motiv pentru care această parametrizare se numește și *naturală* sau *canonică*.

Parametrizarea prin lungime de arc are o proprietate specială și anume

$$(3.9) \qquad \left(\frac{d\tilde{x}}{ds}\right)^2+\left(\frac{d\tilde{y}}{ds}\right)^2=1,$$

adică mărimea vectorului tangent la curbă este constantă egală cu *1*.

Într-adevăr, $\dfrac{d\tilde{x}}{ds}=x'(t(s))\cdot\dfrac{dh}{ds}$ și $\dfrac{d\tilde{y}}{ds}=y'(t(s))\cdot\dfrac{dh}{ds}$ și prin ridicare la pătrat și însumare obținem $\left(\dfrac{d\tilde{x}}{ds}\right)^2+\left(\dfrac{d\tilde{y}}{ds}\right)^2=\left(x'(t(s))+y'(t(s))\right)\left(\dfrac{dh}{ds}\right)^2$.

Prin derivarea identității $h(s(t))\equiv t$ rezultă $\dfrac{dh}{ds}\dfrac{ds}{dt}=1$. Obținem funcția $\dfrac{dh}{ds}=\dfrac{1}{\sqrt{x'^2(t(s))+y'^2(t(s))}}$ care înlocuită mai sus conduce la (3.9).

În continuare vom folosi frecvent parametrizarea naturală pentru rezolvarea unor probleme teoretice. În practică, integrala din (3.7) nu este uşor de calculat încât se operează cu parametrizări care nu satisfac în mod necesar (3.9). Se poate arăta că egalitatea (3.9) este verificată în esență numai pentru parametrizările prin lungime de arc (exercițiu!).

§4. Reperul Serret – Frenet într-un punct al unei curbe plane. Curbură.

Fie o curbă plană reprezentată parametric, cu lungimea de arc s ca parametru.

$$\vec{r}=\vec{r}(s),\ s\in[0,L],\ \left\|\dot{\vec{r}}(s)\right\|=\left\|\frac{d\vec{r}}{ds}\right\|=1. \tag{4.1}$$

Versorul tangentei la curbă este $\vec{t}(s)=\dfrac{\dot{\vec{r}}(s)}{\left\|\dot{\vec{r}}(s)\right\|}=\dot{\vec{r}}(s)$. Notăm prin $\vec{n}(s)$ versorul normalei la curbă în punctul $P(s)$. Alegem sensul lui $\vec{n}$ încât baza $\left(\vec{t},\vec{n}\right)$ să fie pozitiv orientată.

Definiție. *Reperul* $\Re=\left\{P(s),\left(\vec{t}(s),\vec{n}(s)\right)\right\}$ *se numeşte reperul Serret – Frenet al curbei plane (4.1). Cu s variabil în* $[0,L]$ *avem un reper mobil pe curba (4.1).*

În reperul $\left\{O,\left(\vec{i},\vec{j}\right)\right\}$ fixat în plan, ecuația curbei se scrie pe componente în forma

$$\begin{cases} x=x(s), \\ y=y(s),\ s\in[0,L],\ \dot{x}^2(s)+\dot{y}^2(s)=1. \end{cases} \tag{4.2}$$

Rezultă $\vec{t}(s)=\left(\dot{x}(s),\dot{y}(s)\right)$ iar condiția $\left\langle\vec{t},\vec{n}\right\rangle=0$ ne arată că putem lua $\vec{n}(s)=\left(-\dot{y}(s),\dot{x}(s)\right)$. Poziția semnului "-" se impune pentru a ne asigura că baza $\left(\vec{t},\vec{n}\right)$ este pozitiv orientată, adică matricea schimbării acestei baze cu baza $\left(\vec{i},\vec{j}\right)$ să

fie de determinat 1. Într- adevăr, cu această alegere, matricea în discuție este $\begin{bmatrix} \dot{x} & -\dot{y} \\ \dot{y} & \dot{x} \end{bmatrix}$ şi are determinantul egal cu 1.

Prin derivare în raport cu s a egalității $\vec{t}^{\,2}(s)=1$, obținem $\left\langle \vec{t}(s), \dot{\vec{t}}(s) \right\rangle = 0$.

Aşadar vectorul $\dot{\vec{t}}(s)$ este perpendicular pe $\vec{t}(s)$. El este deci coliniar cu $\vec{n}(s)$. Punem $\dot{\vec{t}}(s)=\kappa(s)\vec{n}(s)$. Prin acelaşi raționament dar plecând de la $\vec{n}^{\,2}(s)=1$ obținem $\dot{\vec{n}}(s)=\tilde{\kappa}(s)\vec{t}(s)$. Prin derivarea egalității $\left\langle \vec{t}(s), \vec{n}(s) \right\rangle = 0$ obținem $\left\langle \dot{\vec{t}}(s), \vec{n}(s) \right\rangle + \left\langle \vec{t}(s), \dot{\vec{n}}(s) \right\rangle = 0$ şi folosind expresiile tocmai găsite pentru $\dot{\vec{t}}(s)$ şi $\dot{\vec{n}}(s)$ rezultă $\tilde{\kappa}(s)+\kappa(s)=0$.

Rezumând, am obținut formulele lui Serret – Frenet pentru o curbă plană

$$\dot{\vec{t}}(s)=\kappa(s)\vec{n}(s),\ \dot{\vec{n}}(s)=-\kappa(s)\vec{t}(s). \tag{4.3}$$

În aceste formule apare funcția $\kappa:[0,L]\to\mathbb{R}$ numită curbura curbei plane (4.1).

Din prima formulă (4.3) rezultă $|\kappa(s)|=\left|\dot{\vec{t}}(s)\right|=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2}$.

Vom da o interpretare geometrică foarte utilă a curburii unei curbe plane.

Fie $\theta(s)$ unghiul format de versorul $\vec{t}(s)$ cu versorul $\vec{i}$. Acest unghi este desenat în Fig. 2.

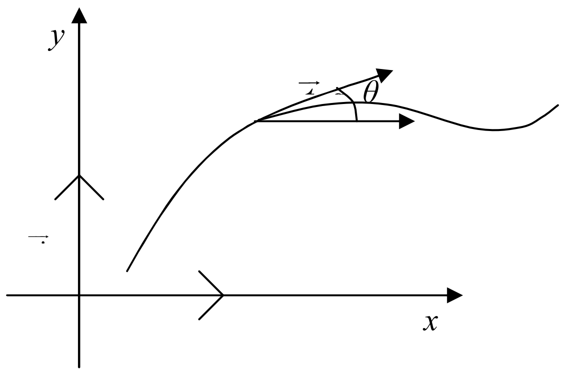

Fig. 2

Rezultă imediat $\dot{x}(s)=\langle\vec{t}(s),\vec{i}\rangle=\cos\theta(s)$, $\dot{y}(s)=\langle\vec{t}(s),\vec{j}\rangle=\sin\theta(s)$ şi prin derivare în raport cu s obţinem $\ddot{x}=-\dot{\theta}(s)\sin\theta(s), \ddot{y}=\dot{\theta}(s)\cos\theta(s)$, $\dot{\theta}(s)=\dfrac{d\theta(s)}{ds}$. Prima formulă Serret – Frenet se scrie pe componente în forma $\ddot{x}=-\kappa\dot{y}$, $\ddot{y}=\kappa\dot{x}$, care combinată cu formulele tocmai obţinute pentru $\ddot{x}$ şi $\ddot{y}$ ne conduce la

$$\kappa(s)=\frac{d\theta}{ds},\ s\in[0,L]. \tag{4.4}$$

Aceasta este interpretarea geometrică a curburii unei curbe în plan. Formula (4.4) ne permite să obţinem o formulă de calcul a curburii în parametrizaţie naturală s.

Un calcul simplu ne arată că are loc egalitatea $\dot{x}(s)\ddot{y}(s)-\dot{y}(s)\ddot{x}(s)=\dot{\theta}(s)$ şi deci

$$\kappa(s)=\dot{x}(s)\ddot{y}(s)-\dot{y}(s)\ddot{x}(s),\ s\in[0,L]. \tag{4.5}$$

Să presupunem că lungimea de arc s provine de la o parametrizare a curbei cu t, adică $s(t)=\int_{t_0}^{t}\left\|\vec{r}\,'(\tau)\right\|d\tau$. Integrala care dă s se calculează greu şi de multe ori funcţia $t\to s(t)$ nu se poate determina explicit. Încât în practică formula (4.5) nu este satisfăcătoare pentru calculul funcţiei curbură. Vom deduce o formulă care ne permite să calculăm curbura plecând de la o parametrizare oarecare. Reţinem că $\dfrac{ds}{dt}=\left\|\vec{r}\,'(t)\right\|=\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}$. Punem $s=s(t)$ în ecuaţiile (4.2) şi obţinem $x=x(s(t)), y=y(s(t))$. Derivăm aceste funcţii, în raport cu t de două ori şi obţinem: $x'(t)=\dot{x}(s(t))\cdot\dfrac{ds}{dt}$, $y'(t)=\dot{y}(s(t))\cdot\dfrac{ds}{dt}$ $\quad x''(t)=\ddot{x}(s(t))\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2+\dot{x}(s(t))\dfrac{d^2s}{dt^2}$, $y''(t)=\ddot{y}(s(t))\left(\dfrac{ds}{dt}\right)^2+\dot{y}(s(t))\dfrac{d^2s}{dt^2}$.

Evaluăm expresia $x'(t)y''(t)-y'(t)x''(t)$. Folosind şi (4.5) obţinem

$$x'(t)y''(t)-y'(t)x''(t)=\kappa(s(t))\left(\frac{ds}{dt}\right)^3$$

Aşadar avem următoarea formulă de calcul a curburii unei curbe plane

(4.6) $$\kappa(t)=\frac{x'(t)y''(t)-y'(t)x''(t)}{\left(x'^2(t)+y'^2(t)\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Observația 4.1. Funcția curbură a curbei plane *C* nu depinde de reperul ortonormat ales în E^2. Faptul decurge din (4.4). Într-adevăr, la o translație a reperului, funcția $s\to\theta(s)$ rămâne aceeași iar la o rotație de unghi α (acesta nu depinde de *s*) funcția $s\to\theta(s)$ trece în $s\to\theta(s)\pm\alpha$. Aceste funcții au aceeași derivată.

Observația 4.2. Fixăm reperul $\mathrm{R}=\left\{O,\left(\vec{i},\vec{j}\right)\right\}$ și efectuăm o translație și apoi o rotație de unghi α a planului E^2. Curba *C* își modifică poziția în plan dar, ca mai sus, se constată că derivata funcției $s\to\theta(s)$ este aceeași adică funcția curbură a curbei rămâne aceeași. Compunerea unei translații cu o rotație directă se numește deplasare în planul E^2. Deplasările sunt izometrii ale lui E^2.

Observația 4.3. Pentru diverse parametrizări ale curbei obținem funcții curbură care au domenii de definiție diferite dar au aceeași mulțime de valori. Într-adevăr, cu un calcul asemănător celui prin care am obținut (4.6) se arată că avem $\kappa(\varphi(t))=\kappa(t)$, $t\in I$ cu $\varphi:I\to J$ un difeomorfism al intervalelor deschise *I* și *J* din $\mathbb{R}$.

§5. Teorema fundamentală a geometriei curbelor plane

Am văzut că oricărei curbe în plan i se asociază funcția curbură care se poate calcula prin formula (4.6) sau (4.5).

Această funcție curbură determină complet curba în sensul teoremei următoare, numită și teorema fundamentală a curbelor plane.

Teorema 5.1. *Fiind dată o funcție* $k:[0,L]\to\mathbb{R},\ s\to\kappa(s)$*, de clasă* $C^r, r\geq 0$*, există o curbă, unică până la o deplasare în plan, pentru care s este lungime de arc și funcția k este funcția curbură a curbei.*

Demonstrația existentei. Fie $s_0\in[0,L)$. Considerăm ecuația diferențială $\dot{\theta}(s)=k(s)$. Prin integrarea ei obținem

(5.1) $$\theta(s)=\theta_0+\int_{s_0}^{s}k(\tau)d\tau,$$

unde $\theta_0=\theta(s_0)$ este un număr real oarecare.

Fie sistemul de ecuații diferențiale în necunoscutele *x, y*

$$\begin{cases} \dot{x}(s) = \cos\theta(s) \\ \dot{y}(s) = \sin\theta(s), \end{cases}$$

cu $s \in [0, L]$ şi unghiul $\theta(s)$ dat de (5.1). Prin integrarea acestui sistem obţinem

$$(5.2) \qquad \begin{cases} x(s) = x_0 + \int_{s_0}^{s} \cos\theta(\sigma)\,d\sigma \\ y(s) = y_0 + \int_{s_0}^{s} \sin\theta(\sigma)\,d\sigma \end{cases}$$

cu $x_0 = x(s_0), y_0 = y(s_0)$ numere reale oarecare.

Aplicaţia $s \to (x(s), y(s))$ este curba căutată, adică o curbă plană pentru care *s* este lungime de arc şi *k* funcţia curbură a ei. Într-adevăr, lungimea ei de arc

$$\int_0^s \sqrt{\dot{x}^2(\sigma) + \dot{y}^2(\sigma)}\,d\sigma = \int_0^s ds = s, \text{ iar curbura}$$

$\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x} = \dot{\theta}\cos^2\theta + \dot{\theta}\sin^2\theta = \dot{\theta}(s) = k(s) \ \forall s \in [0, L]$.

Comentariu asupra unicităţii. În demonstraţia existenţei apar condiţiile iniţiale: punct (x_0, y_0), direcţie θ_0, arbitrare. Deci există o infinitate de curbe pentru care s este lungime de arc şi k funcţie curbură. Sintagma "unică până la o deplasare în plan" înseamnă că oricare două dintre aceste curbe se pot suprapune printr-o deplasare în plan. Pentru demonstraţie a se vedea [1, p.25]. Rezultă că prin deplasări convenabile le putem suprapune pe toate peste una fixată.

Aplicaţie. Să se determine curbele plane de curbură constantă $k \neq 0$. Rezultă $\theta(s) = \theta_0 + k(s - s_0)$ şi

$$\begin{cases} x(s) = \frac{1}{k}\sin(\theta_0 + k(s - s_0)) \\ y(s) = -\frac{1}{k}\cos(\theta_0 + k(s - s_0)) \end{cases}$$

Aşadar $x^2(s) + y^2(s) = \frac{1}{k^2}$, deci curba plană de curbură constantă $k \neq 0$ este un arc de cerc de rază $\frac{1}{k}$.

Curbele plane de curbură zero sunt, evident, drepte în plan.

§6. Forma arcului unei curbe plane în vecinătatea unui punct. Puncte singulare

Fie curba plană (C) $\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s), \quad s \in [0, L] \end{cases}$, cu s parametru natural şi $P(x(s), y(s))$ un punct al curbei C. Considerăm un punct "vecin lui P", $Q(x(s+\Delta s), y(s+\Delta s))$ cu Δs o mică variaţie a lui s. În punctul P avem reperul Serret – Frenet $\{P, (\vec{t}(s), \vec{n}(s))\}$. În acest reper vectorul $\overrightarrow{PQ}$ se scrie în forma

(6.1) $$\overrightarrow{PQ} = \tilde{x}(\Delta s)\vec{t}(s) + \tilde{y}(\Delta s)\vec{n}(s).$$

Pe de altă parte $\overrightarrow{PQ} = \vec{r}(s+\Delta s) - \vec{r}(s) = (x(s+\Delta s) - x(s), y(s+\Delta s) - y(s))$ sau, după aplicarea formulei lui Taylor şi omiterea termenilor care conţin puteri ≥ 3 ale lui Δs, $\overrightarrow{PQ} = \left(\dot{x}(s)\frac{\Delta s}{1!} + \ddot{x}(s)\frac{(\Delta s)^2}{2!}, \dot{y}(s)\frac{\Delta s}{1!} + \ddot{y}(s)\frac{(\Delta s)^2}{2!} \right) = \dot{\vec{r}}(s)\frac{\Delta s}{1!} + \ddot{\vec{r}}(s)\frac{(\Delta s)^2}{2!}$.

Continuăm prin aplicarea formulelor lui Frenet. Rezultă $\overrightarrow{PQ} = \vec{t}(s)\frac{\Delta s}{1!} + k\vec{n}(s)\frac{(\Delta s)^2}{2!}$.

Prin comparaţie cu (6.1) obţinem

(6.2) $$\tilde{x}(\Delta s) = \frac{\Delta s}{1!}, \qquad \tilde{y}(\Delta s) = k\frac{(\Delta s)^2}{2!}, \quad \Delta s \in (-\varepsilon, \varepsilon),$$

cu ε suficient de mic în valoare absolută.

Formula (6.2) ne permite să desenăm arcul de curbură în vecinătatea punctului P. Din (6.2) rezultă

(6.2') $$\tilde{y} = \frac{k}{2}\tilde{x}^2,$$

formulă care ne arată că arcul de curbură în vecinătatea lui P are forma unui arc de parabolă cu vârful în P şi deschiderea indicată de sensul normalei principale (baza $(\vec{t}, \vec{n})$ este pozitiv orientată) dacă are loc $k > 0$ şi cu deschiderea în sens opus dacă are loc $k < 0$. Consideraţiile de mai sus sunt valabile pentru punctul P neinflexionar.

Dacă P este inflexionar, considerând în dezvoltarea Taylor a funcţiilor $s \to x(s), s \to y(s)$ şi termeni ce conţin $(\Delta s)^3$ formulele (6.2) se înlocuiesc cu

$$\text{(6.2'')}\qquad \begin{aligned} \tilde{x}(\Delta s) &= \frac{\Delta s}{1!} - k^2 \frac{(\Delta s)^3}{3!}, \\ \tilde{y}(\Delta s) &= k\frac{(\Delta s)^2}{2!} + \dot{k}\frac{(\Delta s)^3}{3!}, \quad \Delta s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \end{aligned}$$

care în ipoteza $k(s) = 0$ se reduc la

$$\text{(6.3)}\qquad \begin{aligned} \tilde{x}(\Delta s) &= \frac{\Delta s}{1!}, \\ \tilde{y}(\Delta s) &= \dot{k}\frac{(\Delta s)^3}{3!}, \quad \Delta s \in (-\varepsilon, \varepsilon) \end{aligned}$$

Rezultă

$$\text{(6.3')}\qquad \tilde{y} = \dot{k}\,\tilde{x}^3 .$$

Deci arcul curbei *C* în vecinătatea punctului inflexionar *P* are forma unui arc de parabolă cubică (Fig. 4)

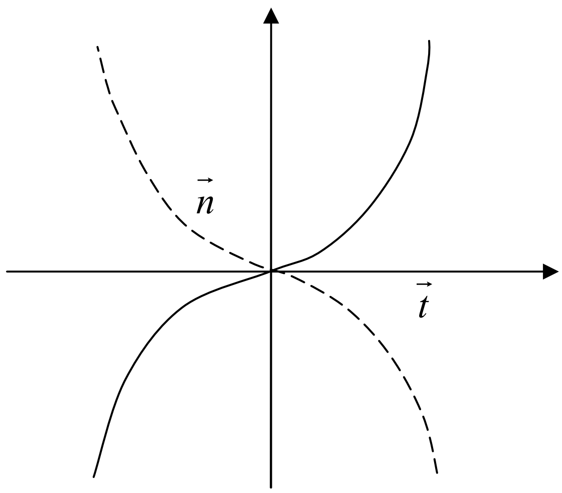

Fig. 4. Arcul plin reprezintă cazul $\dot{k} > 0$ iar cel punctat reprezintă cazul $\dot{k} < 0$

Formulele (6.2) şi (6.3) ne permit să construim graficul curbei *C*. Începem cu un punct *P*, construim un arc ce-l conţine, luăm pe acest arc un punct *P*' şi construim un arc ce-l conţine ş.a.m.d. Pentru a reuşi ne trebuie parametrizarea naturală a curbei şi curbura ei. Procedeul acesta de construcţie este foarte incomod în practică. Există posibilităţi mai comode de a desena graficul curbei *C*.

De exmplu, putem încerca să explicităm (cel puţin un arc al curbei *C*) în forma

$$\text{(6.4)}\qquad y = f(x), \quad x \in (a, b)$$

şi să reprezentăm grafic acest arc prin metoda învăţată în liceu. Explicităm apoi un alt arc al curbei *C* ş.a.m.d.

Dacă acest procedeu este greoi pentru că fie explicitarea este dificilă, fie trebuie să împărţim curba, pentru explicitare, în foarte multe arce, putem să trasăm graficul curbei plecând direct de la o parametrizare oarecare a ei de forma

$$(6.5)\quad \begin{aligned} &x = x(t) \\ &y = y(t), x'^2(t) + y'^2(t) > 0 \ \ \forall t \in I \subseteq \mathbb{R}. \end{aligned}$$

În acest scop se studiază variaţia semnelor derivatelor x', y' şi x'', y''. Dar înainte de aceasta trebuie să ne ocupăm de

Asimptote pentru curbe plane

Fie $P(x(t), y(t))$ un punct pe curba *C* de ecuaţie (6.5).

Să presupunem că pentru $t \to t_0$ (t_0 finit sau $\pm\infty$), fie $x(t)$ fie $y(t)$ tinde către $+\infty$ sau $-\infty$. Vom spune că punctul *P* tinde către infinit pe curba *C* şi arcul descris de *P* se va numi ramură infinită a curbei *C*. Este posibil ca acest arc să se apropie oricât de mult de o dreaptă d în sensul că $\lim\limits_{t \to t_0} dist(P, d) = 0$. În acest caz se spune că dreapta *d* este asimptotă pentru curba *C*. Apar următoarele situaţii:

a) Pentru $t_0 \in I \subseteq \mathbb{R}, \lim\limits_{t \to t_0} x(t) = x_0$ (finit) şi $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty$. În această situaţie dreapta $x = x_0$ este asimptotă (verticală) pentru că distanţa lui *P* la această dreaptă are limita zero pentru $t \to t_0$.

b) Pentru $t_0 \in I \subseteq \mathbb{R}, \lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty$, $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = y_0$ (finit). Atunci dreapta de ecuaţie $y = y_0$ este asimptotă (orizontală) la curba *C*.

c) Pentru $t_0 \in I \subseteq \mathbb{R}, \lim\limits_{t \to t_0} x(t) = \pm\infty$, $\lim\limits_{t \to t_0} y(t) = \pm\infty$. În această situaţie căutăm asimptote (oblice) de forma $y = mx + n$. Condiţia de asimptotă, $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{mx(t) - y(t) + n}{\pm\sqrt{1+m^2}} = 0$, rescrisă în forma $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{x(t)}{\pm\sqrt{1+m^2}} \left(m - \dfrac{y(t)}{x(t)} + \dfrac{n}{x(t)} \right) = 0$, ne arată că în mod necesar, $m = \lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y(t)}{x(t)}$. Forma ecuaţiei asimptotei ne conduce la $n = \lim\limits_{t \to t_0} (y(t) - mx(t))$. Invers, dacă limitele care definesc m şi n există şi sunt finite, distanţa de la $P(x(t), y(t))$ la dreapta $y = mx + n$ tinde la zero pentru $t \to t_0$, deci dreapta $y = mx + n$ este asimptotă a curbei *C*.

Exemplu. Să se reprezinte grafic curba, numită foliul lui Descartes, de ecuaţie $x^3 + y^3 - 3axy = 0,\ \ a \in \mathbb{R}, a > 0$.

Încercăm să găsim o parametrizare a curbei prin intersecţia ei cu dreapta $y = tx$ (Procedeu demn de reţinut!). Înlocuind $y = tx$ în ecuaţia curbei, obţinem

$$\begin{aligned} x &= \frac{3at}{1+t^3} \\ y &= \frac{3at^2}{1+t^3},\quad t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

Observăm că pentru $t \to -1$, funcţiile x şi y devin simultan infinite. Căutăm asimptote oblice. Avem $\lim\limits_{t\to -1} \frac{y(t)}{x(t)} = -1$ şi $\lim\limits_{t\to -1} \left(y(t) - mx(t) \right) = -a$. Aşadar dreapta $x + y + a = 0$ este asimptotă oblică.

Primele derivate sunt $x'(t) = \frac{3a\left(1-2t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^2}, y'(t) = \frac{3at\left(2-t^3\right)}{\left(1+t^3\right)^2}$. Ele se anulează pentru $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ şi respectiv pentru t = 0 şi $t = \sqrt[3]{2}$. Introducem aceste valori şi semnele funcţiilor x’, y’ într-un tabel ca mai jos.

t	$-\infty$			-1		0		$\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$		$\sqrt[3]{2}$			$-\infty$
x'	+ + + + + + + + + + + + + + + + + + +							0	- -				
y'	- -					0	+ + + +			0	- - - - - - - - - - - - - - - -		
x	0	$\nearrow$	$\nearrow$	$+\infty \mid -\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{a}{2\sqrt[3]{2}}$	$\searrow$		$\searrow$	$\searrow$	0
y	0	$\searrow$	$\searrow$	$-\infty \mid +\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$		$\nearrow$	$a\sqrt[3]{4}$	$\searrow$	$\searrow$	0

Din acest tabel reiese graficul curbei C (pentru $a = \sqrt[3]{2}$).

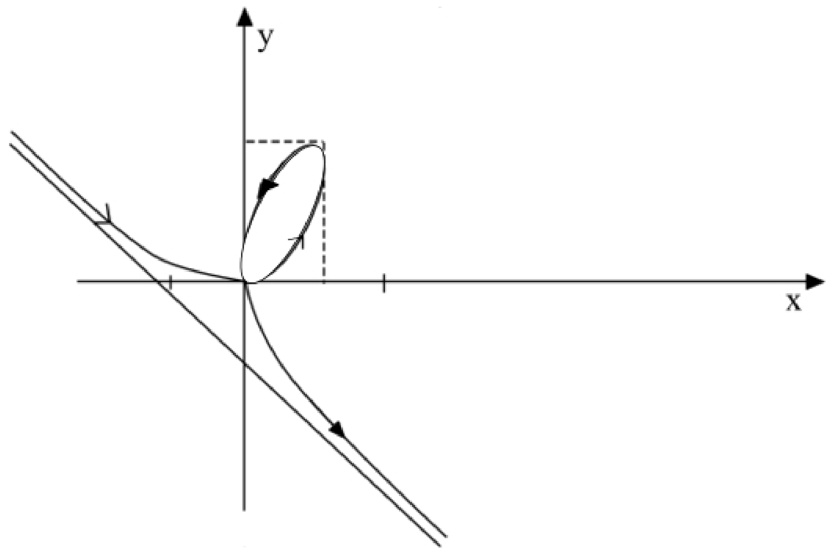

Fig. 5

Săgeţile indică deplasarea punctului *P* al curbei când *t* variază de la $-\infty$ la $+\infty$. Se constată imediat că axa *Ox* este tangentă la curbă în punctul *O*. Acesta este şi punct dublu pentru curbă. El se obţine pentru $t = 0, t = \pm\infty$. După schimbarea de parametru $t = \frac{1}{t}, t' \neq 0$, calculând primele derivate se constată că şi axa *Oy* este tangentă curbei în originea *O*. Reprezentarea parametrică (6.6) ne arată că foliul lui Descartes este curbă în sensul Definiţiei 1.2.

Amintim că în reprezentările parametrică, (1.5), implicită, (1.6), şi explicită, (1.7), ale curbelor plane se impuneau următoarele condiţii:

a) Funcţiile folosite să fie de clasă $C^s\left(s \geq 1\right)$,
b) În reprezentarea parametrică (1.5), derivatele x' şi y' să nu fie simultan nule,
c) În reprezentarea implicită (1.6), derivatele F_x şi F_y să nu fie simultan nule.

Există mulţimi în plan descrise, într-un reper cartezian, de ecuaţii de tipul (1.5), (1.6), (1.7) care au puncte în care nu toate condiţiile a), b), c) sunt satisfăcute. Asemenea puncte se numesc puncte singulare şi mulţimile în cauză se numesc curbe cu singularităţi.

Lăsăm în seama Analizei matematice studiul curbelor cu singularităţi produse de nesatisfacerea condiţiei a) şi ne ocupăm de puncte singulare date de nesatisfacerea condiţiei b), respectiv c).

Fie o curbă cu singularităţi dată parametric prin (1.5). Într-un punct singular avem $x' = y' = 0$. Constatăm că nu mai putem folosi (2.3) pentru a scrie ecuaţia

tangentei în acest punct. Amintim că într-un punct nesingular dat de $t = t_0$, panta tangentei la curbă este $m = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}$.

Această formulă conduce la ideea de a defini tangenta într-un punct singular după cum urmează. Să presupunem mai general că în punctul singular dat de valoarea $t = u_0$ avem

$$x' = x'' = ... = x^{(s-1)} = y' = y'' = ... = y^{(s-1)} = 0,$$

şi că cel puţin una din derivatele $x^{(s)}, y^{(s)}$ este diferită de zero în acest punct.

Formula lui Taylor ne permite să scriem

$$x(u_0 + \Delta t) - x(u_0) = \frac{(\Delta t)^s}{s!} x^{(s)}(u_0 + \theta_1 \Delta t),$$

$$y(u_0 + \Delta t) - y(u_0) = \frac{(\Delta t)^s}{s!} y^{(s)}(u_0 + \theta_2, \Delta t),$$

unde θ_1 şi θ_2 sunt numere reale din intervalul (0,1).

Definind panta tangentei ca şi în puncte nesingulare, rezultă $m = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{y^{(s)}(u_0 + \theta_1, \Delta t)}{x^{(s)}(u_0 + \theta_1, \Delta t)} = \frac{y^{(s)}(u_0)}{x^{(s)}(u_0)}$. Limita există pentru că funcţiile în cauză sunt de clasă $C^s(s \geq 1)$.

Ecuaţia tangentei se scrie în forma

$$\frac{x - x(u_0)}{x^{(s)}(u_0)} = \frac{y - y(u_0)}{y^{(s)}(u_0)}.$$

Fie acum o curbă cu singularităţi dată de ecuaţia $F(x, y) = 0$. Coordonatele (x, y) ale unui punct singular sunt soluţii ale sistemului

$$F(x, y) = 0, \ F_x(x, y) = 0, \ F_y(x, y) = 0.$$

Căutăm panta tangentei într-un asemenea punct.

Fie $P'(x + \Delta x, y + \Delta y)$ un punct vecin lui $P(x, y)$. Panta tangentei în *P* va fi $m = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Punctul *P'* fiind pe curbă, avem

$$F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0.$$

Aplicăm funcţiei *F* formula lui Taylor, oprindu-ne la termeni de ordin 2. Obţinem

$$F_{xx}(x, y)(\Delta x)^2 + 2F_{xy}(x, y)\Delta x \Delta y + F_{yy}(x, y)(\Delta y)^2 = 0.$$

Împărţim prin $(\Delta x)^2$ şi facem $\Delta x \to 0$. Rezultă

$$F_{xx}(x, y) + 2mF_{xy}(x, y) + F_{yy}(x, y)m^2 = 0 .$$

Presupunem că cel puţin una din derivatele de ordinul al doilea a funcţiei F este diferită de zero în P. Ecuaţia de gradul 2 în m conduce la următoarea discuţie.

1) Dacă $F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} > 0$ în P, avem două tangente în P, de pante m_1 şi m_2. Curba arată ca în Fig. 6.

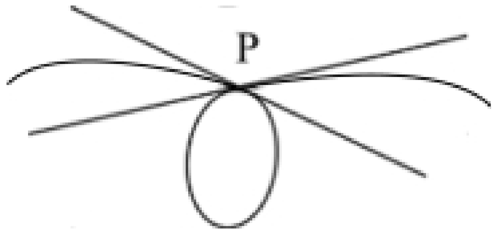

Fig. 6

2) Dacă $F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} = 0$ în P, avem o singură tangentă care trebuie totuşi socotită de două ori. Curba are una din formele

Fig. 7

3) Dacă $F_{xy}^2 - F_{xx}F_{yy} < 0$ în P, atunci P este un punct izolat al mulţimii de puncte definită de ecuaţia $F(x, y) = 0$, în sensul că există un disc centrat în P care nu conţine nici un punct al acestei mulţimi.

Dacă toate derivatele de ordinul al doilea ale funcţiei F sunt nule în P, se face un raţionament similar considerând în formula lui Taylor derivate de ordin ≥ 3 sau şi mai mare dacă derivatele de ordinul al treilea etc. ale funcţiei F sunt nule în P.

CAPITOLUL 2

CURBE ÎN SPAȚIUL EUCLIDIAN E^3

Rezumat. Se definește noțiunea de curbă în spațiu și se dau reprezentările analitice ale curbelor (1) explicită, 2) implicită, 3) vectorial parametrică):

1) $y=\varphi(x), z=\psi(x), x\in(a,b)$.

2) $F(x,y,z)=0, G(x,y,z)=0, rang\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix}=2, (x,y,z)\in V\subseteq\mathbb{R}^3$,

3) $\vec{r}=\vec{r}(t), t\in I\subseteq\mathbb{R}, \vec{r}\,'(t)\neq\vec{0}$, funcțiile care apar fiind diferențiabile de clasă C^s cu $s\geq 3$. Se introduce parametrizarea naturală cu funcția lungime de arc $s(t)=\int_a^t\sqrt{x'^2(\tau)+y'^2(\tau)+z'^2(\tau)}d\tau$. Se construiește triedrul tridreptunghic al lui Frenet, format din planele osculator, normal și rectificator ale cărui muchii sunt tangenta, normala principală (conținută în planul osculator) și binormala (perpendiculară pe planul osculator). Cu versorii tangentei $(\vec{t})$, al normalei principale $(\vec{n})$ și binormalei $(\vec{b})$ se definește reperul ortonormat (reper Frenet) $(\vec{t},\vec{n},\vec{b})$ mobil pe curbă. Variația reperului Frenet este descrisă de formulele lui Frenet: $\frac{d\vec{t}}{ds}=k(s)\vec{n}$, $\frac{d\vec{n}}{ds}=-k(s)\vec{t}+\tau(s)\vec{b}$, $\frac{d\vec{b}}{ds}=-\tau(s)\vec{n}$, în care apar funcția de curbură *k* și de torsiune τ. Într-o parametrizare oarecare $k(t)=\frac{\left|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\right|}{\left|\vec{r}\,'(t)\right|^3}$, $\tau(t)=\frac{\left(\vec{r}\,'(t),\vec{r}\,''(t),\vec{r}\,'''(t)\right)}{\left(r'(t)\times\vec{r}\,''(t)\right)^2}$ și avem $\tau\equiv 0$ dacă și numai dacă curba este plană. Se dau interpretări geometrice ale curburii și torsiunii și se enunță teorema fundamentală care afirmă că date două funcții $k,\tau:[0,L]\to\mathbb{R}$, $s\to k(s), s\to\tau(s)$ continue, există o infinitate de curbe pentru care s este lungimea de arc, funcția k este curbură și funcția τ este torsiune. Oricare două dintre ele se pot suprapune printr-o deplasare în spațiu.

§1. Definiția curbelor în spațiul euclidian E^3

Intuitiv recunoaștem cu ușurință figurile numite curbe din spațiul fizic obișnuit și realizăm că unele sunt simple, de exemplu liniile unui curcubeu și altele sunt mai complicate, cum este zigzagul unui fulger puternic. Pentru a studia aceste figuri, trebuie să le abstractizăm și folosind structura abstractă a spațiului, anume

aceea de spaţiu euclidian cu trei dimensiuni, să le exprimăm analitic, în formule cu care să putem face calcule.

Experienţa de la studiul curbelor plane ne spune că trebuie să fixăm în E^3 un reper ortonormat $\Re = \left\{O, \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)\right\}$ orientat pozitiv şi să considerăm aplicaţii de tipul aplicaţiei $c : I \subseteq \mathbb{R} \to E^3$ cu *I* interval deschis în $\mathbb{R}$. Aplicaţiei *c* i se asociază aplicaţia vectorială $\vec{r} : I \to \mathbb{R}^3$, $t \to \vec{r}(t) = \left(x(t), y(t), z(t)\right)$, $t \in I$ unde funcţiile reale $t \to x(t), t \to y(t), t \to z(t)$ sunt coordonatele vectorului $\overrightarrow{Oc(t)}$ în baza $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ adică

(1.1) $$\overrightarrow{Oc(t)} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k},$$

sau, echivalent, coordonatele punctului $c(t) \in E^3$ în reperul $\Re$.

Presupunem că aplicaţia *c* este diferenţiabilă de clasă $C^s\ (s \geq 1)$ pe *I* ceea ce înseamnă că funcţiile coordonate $t \to x(t), t \to y(t), t \to z(t)$ sunt de clasă $C^s\ (s \geq 1)$ pe *I*.

Matricea Jacobiană a aplicaţiei *c* este $J_c = \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$, unde $x' = \dfrac{dx}{dt}, \ldots$ şi rezultă că *c* este imersie pe *I* dacă şi numai dacă

(1.2) $$x'^2 + y'^2 + z'^2 > 0 \text{ pe } I.$$

Această condiţie este echivalentă cu

(1.2’) $$\vec{r}\,'(t) \neq \vec{0} \text{ pe } I.$$

Reamintim că imersia *c* este scufundare dacă aplicaţia vectorială $\vec{r} : I \to \vec{r}(I)$ este homeomorfism.

Definiţia 1.1. *O submulţime C în E^3 se numeşte **arc elementar de curbă** dacă $C = c(I)$, cu I un interval deschis în $\mathbb{R}$ sau egal cu $\mathbb{R}$ şi aplicaţia c o scufundare diferenţiabilă de clasă $C^s\ (s \geq 1)$ a lui I în E^3. Perechea (I, c) se numeşte parametrizare a arcului elementar de curbă C.*

Fie *J* un alt interval deschis în $\mathbb{R}$ şi $h : J \to I$, $\tau \to h(\tau) = t$ un difeomorfism de clasă $C^s\ (s \geq 1)$, adică $\dfrac{dh}{d\tau} \neq 0\ \forall \tau \in J$.

Propoziţia 1.1. Perechea $\left(J, \tilde{c} = c \circ h\right)$ este o nouă parametrizare a arcului elementar de curbă *C*.

Demonstrație. J este interval deschis prin ipoteză şi $\tilde{c}(J)=c(h(J))=c(I)=C$. Fie $\vec{\rho}=\vec{r}\circ h$ aplicația vectorială asociată aplicației $\tilde{c}$. Prin derivare în raport cu τ a egalității $\vec{\rho}(\tau)=\vec{r}(h(\tau)),\tau\in J$ obținem $\frac{d\vec{\rho}}{d\tau}=\vec{r}\,'(h(\tau))\frac{dh}{d\tau}\neq 0$ pe J deci aplicația $\tilde{c}$ este imersie. Ea este şi scufundare pentru că $\vec{\rho}$ este compunerea a două homeomorfisme. ■

Noțiunea de arc elementar de curbă corespunde imaginii intuitive de "porțiune de curbă" sau "arc de curbă". Intuiția ne spune că o curbă în spațiu este o reuniune de arce, unele dintre ele cu intersecție nevidă. Acest fapt intuitiv este formalizat în

Definiția 1.2. *O submulțime $\mathbb{C}$ în E^3 se numeşte **curbă** dacă orice punct al ei aparține cel puțin unui arc elementar de curbă, conținut în $\mathbb{C}$.*

Această definiție nu acoperă complet noțiunea intuitivă de curbă în spațiu dar circumscrie o clasă foarte largă de curbe întâlnite în practică, curbe care au proprietăți frumoase, deduse prin studiu analitic.

În capitolul de față ne vom ocupa de această noțiune de curbă în spațiu.

§2. Reprezentări analitice ale curbelor în spațiul euclidian E^3.

După cum am văzut în §1, un arc elementar de curbă în spațiu este dat analitic prin aplicațiile c sau $\vec{r}$, cu anume proprietăți. Ne punem problema de a da, de a reprezenta (de a descrie) analitic o curbă în sensul Definiției 1.2.

Teorema 2.1. *Mulțimea* $\mathbb{C}=\{P(x,y,z)\in E^3 \mid y=\varphi(x),\quad z=\psi(x)$ *cu* $x\in(a,b)\subset\mathbb{R}$ *şi funcțiile* $\varphi,\psi:(a,b)\to\mathbb{R}$ *diferențiabile de clasă* $C^s\ (s\geq 1)\}$ *este o curbă în* E^3.

Demonstrație. Vom arăta că $\mathbb{C}$ este chiar un arc elementar de curbă în E^3. În acest scop definim $c:(a,b)\to E^3$ prin $c(x)=P(x,\varphi(x),\psi(x))$ cu aplicația vectorială asociată $\vec{r}:(a,b)\to\mathbb{R}^3$, $x\to(x,\varphi(x),\psi(x))$. Este evident că $c((a,b))=\mathbb{C}$. Cum $\vec{r}\,'(x)=(1,\varphi'(x),\psi'(x))$ este o funcție vectorială care nu se anulează nicăieri pe (a,b), aplicația c este imersie pe (a,b). Aplicația $\vec{r}:(a,b)\to\vec{r}((a,b))$ este homeomorfism pentru că inversa ei $(x,\varphi(x),\psi(x))\to x$ este evident continuă (chiar diferențiabilă de clasă C^∞). ■

Teorema 2.1 ne arată că putem reprezenta o curbă în spațiu prin ecuațiile

(2.1) $$\begin{cases} y=\varphi(x) \\ z=\psi(x),\ x\in(a,b). \end{cases}$$

Această reprezentare se numeşte reprezentare *explicită* pentru o curbă în E^3, în fapt, pentru un arc elementar de curbă în E^3.

În mod asemănător se arată că şi următoarele ecuații

(2.1') $$\begin{cases} x=\varphi(y) \\ z=\psi(y),\ y\in(c,d), \end{cases}$$

(2.1'') $$\begin{cases} x=\varphi(z) \\ y=\psi(z),\ z\in(e,f), \end{cases}$$

reprezintă arce elementare de curbă în E^3. Si acestea se numesc reprezentări explicite ale unui arc elementar de curbă în E^3.

Pentru a găsi o altă reprezentare analitică a unei curbe în E^3 vom demonstra

Teorema 2.2. *Mulțimea* $\mathbb{C}=\left\{P\left(\vec{r}\right)\in E^3 \middle| \vec{r}=\vec{r}(t),\ \ t\in(a,b)\right.$ *cu aplicația vectorială* $t\to\vec{r}(t)$ *diferențiabilă de clasă* $C^s(s\geq 1)$ *şi cu* $\left.\vec{r}\,'(t)\neq\vec{0}$ *pe* $(a,b)\right\}$ *este o curbă în* E^3.

Demonstrație. Vom demonstra că orice punct din $\mathbb{C}$ aparține cel puțin unui arc elementar de curbă, conținut în $\mathbb{C}$. Fie $P_0\left(\vec{r_0}\right)$ cu $\vec{r_0}=\vec{r}(t_0), t_0\in(a,b)$ un punct din $\mathbb{C}$. Aşadar avem $\vec{r}\,'(t_0)=\left(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0)\right)\neq 0$. Să presupunem $x'(t_0)\neq 0$. Rezultă, din continuitate, că $x'(t)\neq 0$ pe un interval deschis $I=(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon),\varepsilon>0$. Pe acest interval funcția $x:t\to x(t)$ este strict monotonă deci injectivă şi cum pe imagine este surjectivă, avem o bijecție $x:I\to J=x(I)$ cu inversa $x^{-1}:J\to I, x\to t=h(x)$, diferențiabilă de clasă $C^s(s\geq 1)$ pentru că funcția $t\to x(t)$ este diferențiabilă de clasă $C^s(s\geq 1)$. Înlocuim $t=h(x)$ în ecuațiile $y=y(t)$ şi $z=z(t)$ şi obținem $y=\varphi(x), z=\psi(x),\ x\in J$ şi $\varphi,\psi : J\to\mathbb{R}$ funcții diferențiabile de clasă $C^s(s\geq 1)$, pentru că sunt compuneri de funcții diferențiabile de clasă $C^s(s\geq 1)$. După Teorema 1.1, mulțimea $\left\{P\left(x,\varphi(x),\psi(x)\right), x\in J\right\}$ este un arc elementar de curbă. Acesta conține punctul P_0, care se obține pentru $x_0=x(t_0)$ şi este conținut în $\mathbb{C}$ pentru că este acea submulțime din $\mathbb{C}$ obținută pentru $t=h(x)$ cu $x\in J$, adică pentru $t\in I\subset(a,b)$.

Dacă $x'(t_0)=0$, atunci fie $y'(t_0)\neq 0$, fie $z'(t_0)\neq 0$. Se face un raționament asemănător şi se obține că P_0 aparține unui arc elementar reprezentat prin (2.1') sau (2.1''). ■

Teorema 2.2 ne permite să afirmăm că ecuația

(2.2) $\vec{r}=\vec{r}(t),\ \vec{r}\,'(t)\neq\vec{0}\ \forall t\in(a,b)$,

reprezintă analitic o curbă în spațiul E^3. Această ecuație se numeşte reprezentarea *vectorial – parametrică* a unei curbe în E^3. Ea are forma echivalentă

(2.2') $$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \\ z=z(t),\ t\in(a,b),\ x'^2+y'^2+z'^2>0 \text{ pe } (a,b), \end{cases}$$

care se numeşte reprezentarea *parametrică* a unei curbe în E^3.

Este evident că dacă restrângem intervalul de variație a lui t la un subinterval deschis I al lui (a,b) pe care aplicația $t\to\vec{r}(t)$ să fie homeomorfism pe imagine, ecuația (2.2) respectiv (2.2') va reprezenta un arc elementar de curbă în E^3.

Există şi o a treia reprezentare analitică a unei curbe în E^3 dată de

Teorema 2.3. *Mulțimea* $\mathbb{C}=\left\{P(x,y,z)\in E^3 \;\middle|\; \begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0, \end{cases}\right.$ *cu* $F,G:D\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, D *mulțime deschisă, diferențiabile de clasă* $C^s\ (s\geq 1)$ *şi rang* $\left.\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix}=2 \text{ pe } D\right\}$*, presupusă nevidă, este o curbă în* E^3.

Demonstrație. Vom arăta că orice punct din $\mathbb{C}$ aparține cel puțin unui arc elementar de curbă, conținut în $\mathbb{C}$. Fie $P_0(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{C}$, deci rang $\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix}_{P_0}=2$. Amintim că $F_x=\dfrac{\partial F}{\partial x}$ etc. Să presupunem că $\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}\neq 0$.
Din continuitate rezultă că acest determinant este diferit de zero pe o mulțime deschisă $D'\subset D$, centrată în P_0, care, după o eventuală micşorare, poate fi luată de forma $D'=I\times J\times K$, unde I,J,K sunt intervale deschise centrate în x_0,y_0,z_0, respectiv. Teorema funcțiilor implicite ne asigură că există funcțiile diferențiabile de clasă C^s, unice, $\varphi:I\to J$ şi $\psi:I\to K$ încât $y_0=\varphi(x_0)$, $z_0=\psi(x_0)$ şi

(*) $F(x,\varphi(x),\psi(x))\equiv 0,\ G(x,\varphi(x),\psi(x))\equiv 0,\ \forall x\in I$.

Considerăm mulțimea $C=\{P(x,\varphi(x),\psi(x))\in E^3 | x\in I\}$. Conform Teoremei 1.1, aceasta este un arc elementar de curbă. Acest arc conține punctul P_0 care se obține pentru $x=x_0$ și este inclus în $\mathbb{C}$ datorită identităților (*). Dacă $\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{P_0}=0$, există un alt determinant de ordin 2 din matricea $\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix}$ care să fie diferit de zero în P_0 și se face un raționament asemănător. Se va obține că P_0 aparține unui arc elementar de curbă reprezentat ca în (1.2') sau în (1.2''). ■

Pe baza Teoremei 2.3 putem spune că sistemul de ecuații

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0, \ (x,y,z)\in D, \end{cases} \tag{2.3}$$

cu condiția rang $\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix}=2$ pe D, dacă are cel puțin o soluție, reprezintă analitic o curbă în E^3. Această reprezentare se numeşte reprezentare *implicită* a unei curbe în E^3.

Funcțiile care intervin în reprezentările analitice (1.2) – (1.3) sunt diferențiabile de clasă $C^s\ (s\geq 1)$. În continuare acest lucru va fi subînțeles iar clasa de diferențiabilitate va fi cea de care avem nevoie în calcule. De cele mai multe ori $s=3$ este suficient.

Cele trei reprezentări ale unei curbe în spațiu – explicită, parametrică, implicită – sunt *local* echivalente în sensul că pentru orice punct P_0 de pe o curbă $\mathbb{C}$ există un arc elementar ce conține P_0 și este conținut în $\mathbb{C}$, care se poate reprezenta în toate cele trei moduri posibile. În demonstrațiile teoremelor 2.2 şi 2.3 am văzut cum se trece de la reprezentarea parametrică respectiv implicită la reprezentarea explicită. Invers, reprezentarea explicită (2.1) este o reprezentare parametrică de forma $x=t,\ y=\varphi(t),\ z=\psi(t),\ t\in(a,b)$ şi totodată o reprezentare implicită particulară şi anume $\begin{cases} F(x,y,z)\equiv y-\varphi(x)=0, \\ G(x,y,z)\equiv z-\psi(x)=0. \end{cases}$

Echivalența locală a celor trei reprezentări analitice creează multe avantaje în studiul *local* al curbelor în spațiu, studiu care urmăreşte stabilirea unor proprietăți referitoare la arce elementare de curbe în spațiu.

§3. Tangentă şi plan normal într-un punct al unei curbe în spațiu

Noțiunile din titlul acestui paragraf sunt locale încât putem să ne limităm la a considera un arc elementar de curbă ce conține punctul în care dorim să definim tangenta şi planul normal, care să admită simultan cele trei reprezentări analitice descrise în §2.

Vom nota un astfel de arc elementar prin C şi-l vom numi simplu curbă în spațiu. Vom presupune că funcțiile cu care se reprezintă C sunt diferențiabile de clasă C^s cu s cât de mare va fi necesar.

Fie pentru început curba C reprezentată parametric prin

(3.1) $\vec{r}=\vec{r}(t),\ \vec{r}\,'(t)\neq\vec{0},\ \forall t\in(a,b).$

Considerații de Mecanică, precum şi situația de la curbe în plan ne conduc la

Definiția 3.1. *Se numeşte tangentă la curba C din spațiu în punctul ei* $P_0\left(\vec{r}(t_0)\right)$*, dreapta care trece prin* P_0 *şi are direcția vectorului* $\vec{r}\,'(t_0)$.

Observație. Tangenta nu depinde de reperul ales în E^3 pentru că este definită de vectorul $\vec{r}\,'$ care rămâne neschimbat la trecerea de la originea O la un alt punct O', situație în care vectorii de poziție ai punctelor curbei devin $\overrightarrow{O'O}+\vec{r}(t)$ cu vectorul $\overrightarrow{O'O}$ independent de t. Tangenta nu depinde nici de parametrizarea curbei. Intr-adevăr, dacă $\varphi: J\to I=(a,b)$ este o schimbare de parametri, $t=\varphi(\tau)$ şi punem $\vec{\rho}(\tau)=\vec{r}(\varphi(\tau))$, vectorul $\frac{d\vec{\rho}}{d\tau}(\tau_0)=\vec{r}\,'(t_0)\frac{d\varphi}{d\tau}(\tau_0), t_0=\varphi(\tau_0)$ este coliniar cu $\vec{r}\,'(t_0)$. Vectorii $\frac{d\vec{\rho}}{d\tau}(\tau_0)$ si $\vec{r}\,'(t_0)$, având aceeaşi direcție, vor determina aceeaşi dreaptă prin punctul $P_0\left(\vec{r}(t_0)=\vec{\rho}(\tau_0)\right)$. Se spune că noțiunea de tangentă este geometrică.

Ecuația vectorial - parametrică a tangentei la curba C reprezentată de (2.1), în punctul $P_0\left(\vec{r}(t_0)\right)$ este

(3.2) $\vec{r}=\vec{r}(t_0)+\lambda\vec{r}\,'(t_0),\ \lambda\in\mathbb{R}.$

Pe componente (3.2) se scrie în forma

(3.3') $$\begin{cases} x=x(t_0)+\lambda x'(t_0),\\ y=y(t_0)+\lambda y'(t_0),\\ z=z(t_0)+\lambda z'(t_0),\ \lambda\in\mathbb{R}\end{cases}$$

sau echivalent,

(3.3'') $$\frac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\frac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\frac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}.$$

Dacă arcul C este reprezentat în forma implicită

(3.4) $$y=\varphi(x),\ z=\psi(x),\ x\in(c,d),$$

ecuațiile tangentei în $P_0(x_0,\varphi(x_0),\psi(x_0))$ rezultă din (3.3'') (cu parametrul $t=x$) în forma

(3.5) $$\frac{x-x_0}{1}=\frac{y-\varphi(x_0)}{\varphi'(x_0)}=\frac{x-\psi(x_0)}{\psi'(x_0)}.$$

Fie arcul C reprezentat în forma implicită

(3.6) $$\begin{cases}F(x,y,z)=0,\\ G(x,y,z)=0,\ (x,y,z)\in D \text{ multime deschisa in } \mathbb{R}^3.\end{cases}$$

Fie $P_0(x_0,y_0,z_0)$ pe acest arc. Considerând simultan şi reprezentarea sa (3.1) în forma scalară, avem

(3.7) $$\begin{cases}F(x(t),y(t),z(t))\equiv 0,\\ G(x(t),y(t),z(t))\equiv 0,\ t\in I \text{ deschis in } \mathbb{R}.\end{cases}$$

Presupunem că P_0 se obține, în reprezentarea (3.1), pentru $t=t_0$. Derivăm fiecare din identitățile (3.7) în raport cu t. Obținem

(3.7') $$\begin{cases}F_x\cdot x'+F_y\cdot y'+F_z\cdot z'\equiv 0,\\ G_x\cdot x'+G_y\cdot y'+G_z\cdot z'\equiv 0, \text{ pe } I.\end{cases}$$

Amintim că vectorul $\left(\dfrac{\partial F}{\partial x},\dfrac{\partial F}{\partial y},\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)$ se numeşte gradientul funcției F şi se notează $\text{grad}F=(F_x,F_y,F_z)$. Similar avem $\text{grad}G=(G_x,G_y,G_z)$. Identitățile (3.7') se transcriu în forma

(3.7'') $$\langle\vec{r}\,'(t),\text{grad}F\rangle=0,\langle\vec{r}\,'(t),\text{grad}G\rangle=0,\ t\in I.$$

De aici rezultă că $\vec{r}\,'(t_0)$ este perpendicular pe vectorii grad_0F şi grad_0G, unde indicele zero semnifică considerarea acestor vectori în $P_0(x_0,y_0,z_0)$, deci este coliniar cu produsul lor vectorial. Aşadar avem $\vec{r}\,'(t_0)=\lambda\ \text{grad}_0F\times\text{grad}_0G,$ unde $\lambda\in\mathbb{R}$ este un factor de proporționalitate. Vectorii grad_0F şi grad_0G sunt necoliniari deoarece $\text{rang}\begin{pmatrix}F_x & F_y & F_z\\ G_x & G_y & G_z\end{pmatrix}_0=2.$

Folosim forma obținută pentru $\vec{r}'(t_0)$ în formula (3.7'') şi ținem seama de formula de calcul a produsului vectorial a doi vectori. Obținem ecuațiile tangentei la curba *C,* dată implicit, în punctul ei $P_0(x_0, y_0, z_0)$:

(3.8) $$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_0} = \frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_0} = \frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_0}.$$

Definiția 3.2. *Se numeşte plan normal la curba C în punctul ei* P_0, *planul care trece prin* P_0 *şi este perpendicular pe tangenta la curba C în* P_0.

În cazul reprezentării parametrice (3.1), ecuația planului normal la curba *C* în $P_0(t_0)$ este

(3.9) $$\langle \vec{r} - \vec{r}(t_0), \vec{r}'(t_0) \rangle = 0$$

sau, în coordonate,

(3.9') $$(x - x(t_0))x'(t_0) + (y - y(t_0))y'(t_0) + (z - z(t_0))z'(t_0) = 0.$$

Pentru reprezentarea explicită (3.4) a curbei *C*, ecuația planului normal la *C* în $P_0(x_0, \varphi(x_0), \psi(x_0))$, are forma

(3.10) $$x - x_0 + (y - \varphi(x_0))\varphi'(x_0) + (z - \psi(x_0))\psi'(x_0) = 0.$$

Dacă arcul de curbă *C* este dat în forma implicită (3.6), din ecuațiile (3.8) ale tangentei la curba *C* se deduce că ecuația planului normal în $P_0(x_0, y_0, z_0)$ este dată de

(3.11) $$(x-x_0)\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_0 + (y-y_0)\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_0 + (z-z_0)\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_0 = 0$$

sau echivalent,

(3.11') $$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ F_x^0 & F_y^0 & F_z^0 \\ G_x^0 & G_y^0 & G_z^0 \end{vmatrix} = 0,$$

unde indicele zero indică evaluarea în punctul P_0 a derivatelor parțiale în cauză.

§4. Lungimea unui arc de curbă în spațiu. Parametrizații naturale.

Fie un arc de curbă în spațiu, nu neapărat elementar, reprezentat în forma parametrică

(4.1) $\vec{r}=\vec{r}(t),\ t\in[a,b]$.

Funcția vectorială $t\to\vec{r}(t)$ este diferențiabilă de clasă $C^s\ (s\geq 1)$ pe $[a,b]$ în sensul că admite o extensiune diferențiabilă de clasă $C^s\ (s\geq 1)$ pe un interval deschis ce conține $[a,b]$.

Notăm $A(\vec{r}(a))$ şi $B(\vec{r}(b))$ şi vom vorbi de arcul parametrizat $\overset{\frown}{AB}$. Noțiunea de lungime de arc se obține ca şi la curbe în plan.

Fie $\Delta=(a=t_0<t_1<...<t_i<t_{i+1}<...<t_n=b)$ o diviziune a intervalului $[a,b]$. Punctele $A(\vec{r}(a)),\ A_1(\vec{r}(t_1)),\ \ldots,\ A_n(\vec{r}(t_n))\equiv B$ determină o linie poligonală înscrisă în arcul parametrizat $\overset{\frown}{AB}$. Lungimea acestei linii poligonale este dată de

(4.2) $l_\Delta=\sum\limits_{i=0}^{n-1}\left\|\vec{r}(t_{i+1})-\vec{r}(t_i)\right\|$.

Din inegalitatea triunghiulară rezultă că înlocuind Δ cu o diviziune mai fină Δ', avem $l_\Delta\leq l_{\Delta'}$. Cum nu putem decide dacă lungimile l_Δ cresc oricât sau nu depăşesc un număr finit, odată cu rafinarea diviziunilor, notăm prin D mulțimea tuturor diviziunilor lui $[a,b]$ şi introducem

Definiția 4.1. *Se spune că arcul parametrizat $\overset{\frown}{AB}$ are **lungime** sau că este **rectificabil** dacă mulțimea $\{l_\Delta,\Delta\in D\}$ este mărginită superior. Marginea superioară a acestei mulțimi se numeşte lungimea arcului parametrizat $\overset{\frown}{AB}$.*

Formula (4.2) ne arată că arcul parametrizat $\overset{\frown}{AB}$ este rectificabil dacă şi numai dacă funcția $t\to\vec{r}(t),\ t\in[a,b]$ este cu variație mărginită pe $[a,b]$.

Din inegalitățile duble

(4.3) $$\left.\begin{matrix}|x|\\|y|\\|z|\end{matrix}\right\}\leq\sqrt{x^2+y^2+z^2}\leq|x|+|y|+|z|,$$

rezultă că funcția $t\to\vec{r}(t)$ este cu variație mărginită pe $[a,b]$ dacă şi numai dacă funcțiile coordonate $t\to x(t),t\to y(t),t\to z(t)$ sunt cu variație mărginită pe $[a,b]$.

Dacă funcția $t \to \vec{r}(t)$ este de clasă C^1 pe $[a,b]$, prin folosirea teoremei creşterilor finite, lungimea l_Δ se poate scrie în forma

(4.4) $$l_\Delta = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{x'^2(\xi_i) + y'^2(\mu_i) + z'^2(\eta_i)}\,(t_{i+1} - t_i),$$

unde $\xi_i, \mu_i, \eta_i \in (t_i, t_{i+1})$.

Dacă numerele ξ_i, μ_i, η_i ar coincide , l_Δ ar fi sumă Riemann pentru funcția $\sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$ şi am obține $l_{\widehat{AB}} = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt$. În general, numerele ξ_i, μ_i, η_i nu coincid. Se poate totuşi arăta ([13]) că are loc

Teorema 4.1. *Fie un arc de curbă parametrizată $\widehat{AB}$ reprezentat de (4.1) cu funcții $t \to \vec{r}(t)$ de clasă C^1. Asemenea arc este rectificabil şi avem*

(4.5) $$l_{\widehat{AB}} = \int_a^b \left\|\vec{r}\,'(t)\right\| dt = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt.$$

Arătăm acum că lungimea arcului $\widehat{AB}$ nu depinde de parametrizarea aleasă. Într-adevăr, fie $t = \varphi(\tau)$ cu $\tau \in [c,d]$ şi $\varphi'(\tau) \neq 0$ pe $[c,d]$ o schimbare de parametru pe arcul $\widehat{AB}$.

Reprezentarea (4.1) trece în forma $\vec{c}(\tau) = \vec{r}(\varphi(\tau))$, $\tau \in [c,d]$ şi în conformitate cu (4.5) avem $l'_{\widehat{AB}} = \int_c^d \left\|\frac{d\vec{c}}{d\tau}\right\| d\tau$, unde prin accent am indicat lungimea lui $\widehat{AB}$ în noua parametrizare. Dacă $\varphi'(\tau) > 0$ pe $[c,d]$, avem $l'_{\widehat{AB}} = \int_c^d \left\|\vec{r}\,'(\varphi(\tau))\right\| \varphi'(\tau)\, d\tau$. În această integrală facem schimbarea de variabilă $\varphi(\tau) = t$. Cum $dt = \varphi'(\tau)d\tau$ şi $\varphi(c) = a$, $\varphi(c) = b$ rezultă

$$l'_{\widehat{AB}} = \int_a^b \left\|\vec{r}\,'(t)\right\| dt \ = l_{\widehat{AB}}.$$

În cazul în care $\varphi'(\tau) < 0$ pe $[c,d]$, avem $\varphi(c) = b$ şi $\varphi(d) = a$ şi cu aceeaşi schimbare de variabilă în integrală obținem

$$l'_{\widehat{AB}} = -\int_c^d \left\|\vec{r}\,'(\varphi(\tau))\right\| \varphi'(\tau)\, d\tau = \int_d^c \left\|\vec{r}\,'(\varphi(\tau))\right\| \varphi'(\tau)\, d\tau = \int_a^b \left\|\vec{r}\,'(t)\right\| dt = l_{\widehat{AB}}.$$

Vom spune că (4.5) este formula de calcul pentru lungimea (când există!) unui arc de curbă.

Fie funcția $t \to s(t)$ dată prin

(4.6) $$s(t) = \int_a^t \left\|\vec{r}\,'(\sigma)\right\| d\sigma, \ a \le t \le b \ .$$

Derivata acestei funcţii este $s'(t)=\left\|\vec{r}\,'(t)\right\|>0$. Aşadar ea este strict crescătoare pe $[a,b]$. Rezultă că este bijecţie de la $[a,b]$ la $[0,L]$, unde $L:=l_{\overset{\frown}{AB}}$. Inversa ei, $t=h(s)$ este de aceeaşi clasă de diferenţiabilitate cu funcţia *s*. Efectuăm o schimbare de parametru pe arcul $\overset{\frown}{AB}$ dată de $t=h(s)$, posibilă pentru că $\dfrac{dh}{ds}=\dfrac{1}{\left\|\vec{r}\,'(h(s))\right\|}$, din formula de derivare a inversei unei funcţii.

În această nouă parametrizare, reprezentarea (4.1) devine

(4.7) $\quad \vec{c}(s)=\vec{r}(h(s)),\ s\in[0,L]$.

Prin derivare în raport cu *s* în (4.7) obţinem $\dfrac{d\vec{c}}{ds}=\dfrac{d\vec{r}}{dt}(h(s))\dfrac{dh}{ds}$ şi considerând lungimile acestor vectori avem $\left\|\dfrac{d\vec{c}}{ds}\right\|=\left\|\vec{r}\,'(h(s))\right\|\left|\dfrac{dh}{ds}\right|=1$. Aşadar am obţinut

Teorema 4.2. *Parametrizare prin lungimea de arc s are proprietatea că lungimea vectorului tangent este constantă, egală cu 1.*

O parametrizare a curbei cu proprietatea că în acea parametrizare lungimea vectorului tangent curbei este constantă, egală cu 1, se numeşte **parametrizare naturală** sau **parametrizare canonică**.

Teorema 4.2 ne spune că funcţia lungime de arc dă o parametrizare naturală a curbei sau că arcul s pe curbă este un parametru natural. În această parametrizare, pentru arcul de capete $P_0(s_0)$ şi $P_1(s_1)$ cu $s_0<s_1$ avem $l_{\overset{\frown}{P_0P_1}}=\int_{s_0}^{s}\left\|\vec{c}(\sigma)\right\|d\sigma=\int_{s_0}^{s_1}d\sigma=s_1-s_0$. Această relaţie ne permite să gândim *s* ca abscisă curbilinie a unui punct de pe arcul $\overset{\frown}{AB}$.

Este natural să ne întrebăm dacă mai există şi alte parametrizări naturale în afara celei date de lungimea de arc. Fie $\vec{r}=\vec{r}(s)$ cu $\left\|\dfrac{d\vec{r}}{ds}\right\|=1$. Să efectuăm o schimbare de parametru $s=h(\sigma)$ şi să presupunem că $\left\|\dfrac{d\vec{c}(\sigma)}{d\sigma}\right\|=1$, unde $\vec{c}(\sigma)=\vec{r}(h(\sigma))$. Dacă trecem la lungimi în egalitatea vectorială $\dfrac{d\vec{c}}{d\sigma}=\dfrac{d\vec{r}}{ds}\,\dfrac{dh}{d\sigma}$ obţinem $\dfrac{dh}{d\sigma}=\pm1$ şi deci

(4.8) $\quad \sigma=\pm s+a,\ a\in\mathbb{R}$.

Aşadar parametrizările naturale pe curbă sunt cele din (4.8). Ele sunt în esență date de lungimea de arc *s*.

§5. Planul osculator într-un punct neinflexionar al unei curbe în spațiu.

Fie o curbă *C* în spațiu reprezentată parametric în forma

(5.1) $\vec{r} = \vec{r}(t),\ \vec{r}\,'(t) \neq \vec{0}\ \forall t \in (a,b)$,

prin funcții diferențiabile de clasă $C^k, k \geq 3$.

Am văzut mai sus că vectorul $\vec{r}\,'(t_0)$ dă direcția tangentei la curba *C* în punctul $P_0(t_0)$. Considerăm şi vectorul $\vec{r}\,''(t_0)$. Acesta poate fi coliniar cu $\vec{r}\,'(t_0)$, situație în care se spune că P_0 este punct *inflexionar* al curbei *C* sau poate fi necoliniar cu $\vec{r}\,'(t_0)$, adică $\vec{r}\,'(t_0) \times \vec{r}\,''(t_0) \neq \vec{0}$, caz în care P_0 se numeşte punct *neinflexionar* al curbei *C*.

Un punct neinflexionar $P_0(t_0) \in C$ şi vectorii $\vec{r}\,'(t_0)$, $\vec{r}\,''(t_0)$ determină un plan numit prin tradiție *plan osculator* la curba *C* în P_0. Direcția normală a acestui plan este direcția vectorului $\vec{r}\,'(t_0) \times \vec{r}\,''(t_0)$. Aşadar introducem

Definiția 5.1. *Se numeşte plan osculator la curba C într-un punct* $P_0(\vec{r}(t_0)) \in C$, *neinflexionar, planul care trece prin* P_0 *şi are ca direcție normală direcția vectorului* $\vec{r}\,'(t_0) \times \vec{r}\,''(t_0) \neq \vec{0}$.

Această definiție ne permite o serie de

Observații:

1. Planele care conțin tangenta la curba *C* prin $P_0 \in C$ se numesc plane tangente. Ele formează un fascicol. Într-un punct $P_0 \in C$, neinflexionar, putem alege unul dintre planele tangente cu ajutorul lui $\vec{r}\,''$: planul osculator în P_0. Dacă P_0 este punct inflexionar, o asemenea alegere nu mai este posibilă. Putem lua ca plan osculator oricare dintre planele tangente. Aşadar, în puncte inflexionare, planul osculator nu este unic determinat.

2. Planul osculator este strict legat de curbă. El nu depinde de reperul ales în spațiu pentru că este definit de P_0, de $\vec{r}\,'$ şi $\vec{r}\,''$, elemente care nu depind de reper. Acest plan nu depinde nici de parametrizarea aleasă pe curbă. Într-adevăr, fie $\vec{c}(\tau) = \vec{r}(h(\tau))$ după o schimbare de parametru $t = h(\tau)$, $h'(\tau) \neq 0$. Punctul $P_0 \in C$ rămâne acelaşi numai că se obține pentru valoarea τ_0 soluție unică a ecuației

$t_0=h(\tau)$. Pe de altă parte avem $\frac{d\vec{c}}{d\tau}(\tau_0)=\vec{r}\,'(t_0)\frac{dh}{d\tau}(\tau_0)$, şi $\frac{d^2\vec{c}}{d\tau^2}=\vec{r}\,''(t_0)\left(\frac{dh}{d\tau}(\tau_0)\right)^2+\vec{r}\,'(t_0)\frac{d^2h}{d\tau^2}(\tau_0)$ şi prin înmulţire vectorială rezultă că vectorul $\frac{d\vec{c}}{d\tau}(\tau_0)\times\frac{d^2c}{d\tau^2}(\tau_0)$ dat de

$$\frac{d\vec{c}}{d\tau}(\tau_0)\times\frac{d^2\vec{c}}{d\tau^2}(\tau_0)=\left(\vec{r}\,'(t_0)\times\vec{r}\,''(t_0)\right)\left(\frac{dh}{d\tau}(\tau_0)\right)^3, \tag{5.2}$$

are aceeaşi direcţie cu vectorul $\vec{r}\,'(t_0)\times\vec{r}\,''(t_0)$.

3. Formula (5.2) ne spune că un punct inflexionar într-o parametrizare este astfel în toate parametrizările. Spunem că noţiunea de punct inflexionar este noţiune geometrică pentru că nu depinde de reperul ales şi nici de parametrizarea curbei. Evident că şi noţiunea de plan osculator este geometrică, în acelaşi sens.

Definiţia 5.1 ne spune că ecuaţia planului osculator se poate da în formele

$$\left\langle \vec{r}-\vec{r}(t_0),\vec{r}\,'(t_0)\times\vec{r}\,''(t_0)\right\rangle=0, \tag{5.3}$$

$$\left(\vec{r}-\vec{r}(t_0),\vec{r}\,'(t_0),\vec{r}\,''(t_0)\right)=0, \tag{5.3'}$$

$$\begin{vmatrix} x-x(t_0) & x'(t_0) & x''(t_0) \\ y-y(t_0) & y'(t_0) & y''(t_0) \\ z-z(t_0) & z'(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix}=0. \tag{5.3''}$$

Revenim la noţiunea de punct inflexionar. Aceasta se aplică şi curbelor plane care evident pot fi gândite drept curbe în spaţiu, situate într-un plan care se poate lua de ecuaţie $z=0$, la o alegere convenabilă a reperului în spaţiu. Curba plană are atunci reprezentarea explicită $\begin{cases} y=f(x) \\ z=0,\ x\in(c,d), \end{cases}$ care se poate pune în forma parametrică $\begin{cases} x=x \\ y=f(x) \\ z=0,\ x\in(c,d) \end{cases}$.

Rezultă $\vec{r}\,'=(1,f',0)$, $\vec{r}\,''=(0,f'',0)$ şi $\left(\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\right)(x)=f''(x)\vec{k}$ de unde conchidem că pentru o curbă din planul xOy de ecuaţie $y=f(x)$, punctele inflexionare sunt date de soluţiile ecuaţiei $f''(x)=0$. Aşadar, pentru curbe plane noţiunea de punct inflexionar se reduce la aceea întâlnită încă din liceu la studiul variaţiei funcţiilor reale de variabilă reală.

Fie în particular o dreaptă în spaţiu de ecuaţie

(5.4) $\vec{r} = \vec{a} + \lambda\vec{u},\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Cum $\frac{d\vec{r}}{d\lambda} = \vec{u}$ şi $\frac{d^2r}{d\lambda^2} = 0$, rezultă că toate punctele dreptei sunt puncte inflexionare. Ne întrebăm dacă există şi alte curbe care să aibă toate punctele inflexionare. Răspunsul este negativ pentru că are loc

Teorema 5.1. *O curbă în spațiu cu toate punctele inflexionare este un segment deschis de dreaptă sau o dreaptă.*

Demonstrație. Fie curba C în spațiu reprezentată parametric prin (5.1) cu toate punctele inflexionare, adică $\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t) = \vec{0}\ \ \forall t \in (a,b)$. Fie $\vec{u}(t) = \frac{\vec{r}'(t)}{\left\|\vec{r}'(t)\right\|}$ versorul lui $\vec{r}'(t)$, adică $\vec{u}^2(t) = 1$. Putem deci scrie $\vec{r}'(t) = g(t)\vec{u}(t)$, cu $g(t) = \left\|\vec{r}'(t)\right\| \neq 0$. Din ecuația $\vec{u}^2(t) = 1$ rezultă $\left\langle \vec{u}(t), \vec{u}'(t)\right\rangle = 0$, deci $\vec{u}'(t)$ este perpendicular pe $\vec{u}(t)$. Condiția $\vec{r}'(t)\times\vec{r}''(t) = \vec{0}$ este echivalentă cu $g^2(t)\vec{u}(t)\times\vec{u}'(t) = \vec{0}$ care ne arată că $\vec{u}'(t)$ este coliniar cu $\vec{u}(t)$. Aşadar $\vec{u}'(t) = 0\ \forall t \in (a,b)$. Cu alte cuvinte $\vec{r}'(t)$ are direcție fixă. Prin integrarea ecuației vectoriale $\vec{r}'(t) = g(t)\vec{u}$ obținem $\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \vec{u}\int_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau$. Aşadar vectorul de poziție $\vec{r}(t)$ al unui punct oarecare pe C verifică ecuația $\vec{r} = \vec{r_0} + \lambda\vec{u}$, cu $\vec{r_0} = \vec{r}(t_0)$ şi $\lambda = \int_{t_0}^{t} g(\tau)\,d\tau \in \mathbb{R}$, care este ecuația unei drepte. Rezultă că C este fie un segment deschis de dreaptă fie dreaptă în întregime. ■

§6. Reperul Frenet asociat unei curbe în spațiu

După cum am vazut mai sus, într-un punct neinflexionar P al unei curbe în spațiu avem două plane perpendiculare: planul osculator şi planul normal. Ele sunt perpendiculare pentru că planul osculator conține tangenta care este o dreaptă perpendiculară pe planul normal. Cele două plane se intersectează după o dreaptă care, pentru că este conținută în planul normal şi pentru a o distinge de o alte drepte din planul normal, se numeşte tradițional *normală principală*. Dreapta care trece prin P şi este perpendiculară pe tangentă şi pe normala principală în P se numeşte *binormală*. Evident că aceasta este conținută în planul normal prin P, plan care conține toate dreptele perpendiculare pe tangentă în P. Tangenta şi cu binormala în P determină un plan numit *plan rectificator* care este evident perpendicular pe planul normal şi pe planul tangent în P.

Aşadar putem vorbi de un triedru tridreptunghic cu vârful în P numit triedrul lui Frenet (vezi Fig.8).

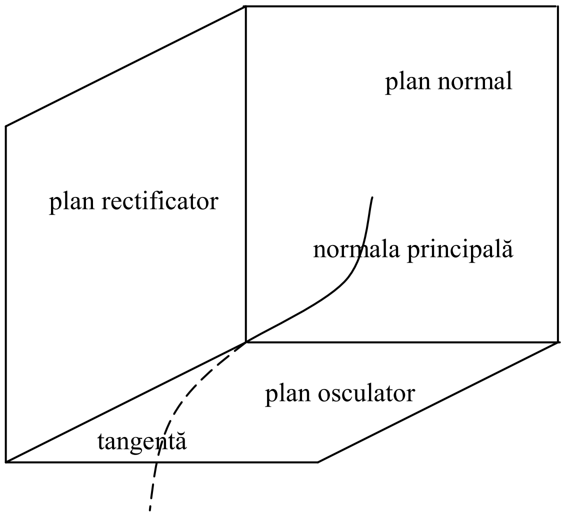

Fig. 8

Muchiile acestui triedru sunt: tangenta, normala principală şi binormala iar fețele sale sunt: planul osculator, planul normal şi planul rectificator.

Triedrul Frenet este intrinsec asociat curbei, adică nu depinde de reperul din spațiu şi nici de parametrizarea de pe curbă. Aceste aspecte le-am verificat direct pentru tangentă şi pentru planul osculator iar celelalte elemente ale triedrului Frenet au fost definite geometric, fără nici o referire la reperul ales în spațiu sau la parametrizarea curbei.

Să presupunem curba C reprezentată vectorial – parametric prin

(6.1) $\vec{r} = \vec{r}(t),\ \vec{r}\,'(t) \neq \vec{0},\ \forall t \in (a,b) \subseteq \mathbb{R}$.

Ecuațiile tangentei, planului normal şi planului osculator în $P_0(t_0) \equiv P_0(\vec{r}(t_0))$ au fost precizate anterior. Binormala, fiind perpendiculară pe planul osculator, are direcția dată de vectorul $\vec{r}\,'(t_0) \times \vec{r}\,''(t_0)$. Deci ecuația ei este

(6.2) $\vec{r} = \vec{r}(t_0) + \lambda\left(\vec{r}\,'(t_0) \times \vec{r}\,''(t_0)\right),\ \lambda \in \mathbb{R}$.

Normala principală, ca perpendiculară pe tangentă şi binormală, are direcția dată de vectorul $\left(\vec{r}\,'(t_0) \times \vec{r}\,''(t_0)\right) \times \vec{r}\,'(t_0)$ şi deci se poate reprezenta analitic prin ecuația

(6.3) $\vec{r} = \vec{r}(t_0) + \mu\left(\left(\vec{r}\,'(t_0) \times \vec{r}\,''(t_0)\right) \times \vec{r}\,'(t_0)\right),\ \mu \in \mathbb{R}$.

Ecuația planului rectificator se poate scrie uşor. Având în vedere că el trece prin P_0 şi conține tangenta şi binormala rezultă

(6.4) $\left(\vec{r}-\vec{r}(t_0),\vec{r}\,'(t_0),\vec{r}\,'(t_0)\times\vec{r}\,''(t_0)\right)=0$.

Considerăm $P(t)\equiv P\left(\vec{r}(t)\right)$ punct variabil pe curba C şi introducem

- Versorul tangentei: $\vec{t}=\dfrac{\vec{r}\,'}{\left\|\vec{r}\,'\right\|}$
- Versorul normalei principale: $\vec{n}=\dfrac{\left(\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\right)\times\vec{r}\,'}{\left\|\left(\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\right)\times\vec{r}\,'\right\|}$
- Versorul binormalei: $\vec{b}=\dfrac{\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''}{\left\|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\right\|}$.

Aceşti versori sunt ortogonali doi câte doi.

Definiția 6.1. *Reperul* $\left\{P,\left(\vec{t},\vec{n},\vec{b}\right)\right\}$ *se numeşte reperul Frenet asociat curbei C.*

Observația 6.1. Reperul Frenet este un reper mobil pe curbă. El există în toate punctele neinflexionare ale curbei.

Observația 6.2. Versorii $\vec{t},\vec{n},\vec{b}$ verifică evident egalitățile

(6.5) $\vec{t}\times\vec{n}=\vec{b},\ \vec{n}\times\vec{b}=\vec{t},\ \vec{b}\times\vec{t}=\vec{n}$

(care se rețin prin ciclicitate)

(6.6) $\left(\vec{t},\vec{n},\vec{b}\right)=1$.

Egalitatea (6.6) ne spune că reperul Frenet este pozitiv (drept) orientat.

Studiem comportarea versorilor $\vec{t},\vec{n},\vec{b}$ la o schimbare de parametru pe curba C. Ştim deja că direcțiile şi lungimile lor nu depind de parametrizare. Rămâne să vedem ce se întâmplă cu sensul lor la o schimbare de parametru $t=h(\tau),\ \tau\in(c,d)$, $\dfrac{dh}{d\tau}\neq 0$ pe (c,d). Fie $\vec{c}(\tau)=\vec{r}\left(h(\tau)\right)$. Avem:

(6.7)
$$\left\|\frac{d\vec{c}}{d\tau}\right\|=\left\|\vec{r}\,'\right\|\left\|\frac{dh}{d\tau}\right\|,\quad \left\|\frac{d\vec{c}}{d\tau}\times\frac{d^2\vec{c}}{d\tau^2}\right\|=\left\|\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\right\|\left\|\frac{dh}{d\tau}\right\|^3$$
$$\left\|\left(\frac{d\vec{c}}{d\tau}\times\frac{d^2\vec{c}}{d\tau^2}\right)\times\frac{d\vec{c}}{d\tau}\right\|=\left\|\left(\vec{r}\,'\times\vec{r}\,''\right)\times\vec{r}\,'\right\|\left\|\frac{dh}{d\tau}\right\|^4.$$

Aceste egalități ne arată că dacă $\dfrac{dh}{d\tau}>0$, adică schimbarea de parametru păstrează sensul de parcurs al arcului de curbă sau orientarea curbei, versorii $\vec{t},\vec{n}$ şi

$\vec{b}$ își păstrează sensul. În caz contrar, adică $\frac{dh}{d\tau} < 0$, versorii tangentei și binormalei își schimbă sensul iar cel al normalei principale rămâne același.

Schimbarea de sens a versorului tangentei este în acord cu interpretarea acestui versor ca versor al vectorului viteză al unui mobil ce se deplasează pe curba *C*. Fizica ne spune că sensul vectorului viteză este același cu sensul de deplasare a mobilului pe curba *C*.

Observația 6.3. Considerațiile tocmai încheiate ne arată că reperul Frenet rămâne pozitiv (drept) orientat indiferent de parametrizare de pe curbă.

Parametrizările naturale se dovedesc din nou importante.

Teorema 6.1. *Într-o parametrizare naturală* $\vec{r} = \vec{r}(s)$, $s \in [0, L]$ $\left(\left\| \dot{\vec{r}}(s) \right\| = 1 \right)$, *versorii reperului Frenet sunt dați de formulele*

$$\begin{aligned} &\vec{t}(s) = \dot{\vec{r}}(s), \\ (6.8) \qquad &\vec{n}(s) = \frac{\ddot{\vec{r}}(s)}{\left\| \ddot{\vec{r}}(s) \right\|}, \\ &\vec{b}(s) = \frac{\dot{\vec{r}}(s) \times \ddot{\vec{r}}(s)}{\left\| \dot{\vec{r}}(s) \times \ddot{\vec{r}}(s) \right\|}. \end{aligned}$$

Demonstrație. Prima formulă este imediată pentru că $\left\| \dot{\vec{r}}(s) \right\| = 1$. Expresia lui $\vec{b}$ este aceeași ca în orice altă parametrizare. Rămâne să stabilim forma lui $\vec{n}(s)$.

Din $\dot{\vec{r}}^{\,2} = 1$ rezultă $\ddot{\vec{r}} \perp \dot{\vec{r}} = \vec{t}$. Cum $\ddot{\vec{r}} \perp \vec{b}$, rezultă că $\ddot{\vec{r}}$ este coliniar cu $\vec{n}$, adică $\vec{n} = \lambda \ddot{\vec{r}}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Urmează că $\vec{n} = \pm \frac{\ddot{\vec{r}}}{\left\| \ddot{\vec{r}} \right\|}$. Semnul " – " se elimină pentru că bazele $\left(\vec{t}, \vec{n}, \vec{b} \right)$ și $\left(\dot{\vec{r}}, \ddot{\vec{r}}, \dot{\vec{r}} \times \ddot{\vec{r}} \right)$ sunt pozitiv orientate, deci $\vec{n}$ și $\ddot{\vec{r}}$ au și același sens.■

§7. Formulele lui Frenet pentru o curbă în spațiu

Am subliniat mai sus că reperul Frenet $\Re_F = \left\{P(s), \left(\vec{t}(s), \vec{n}(s), \vec{b}(s)\right)\right\}$ este mobil pe curba *C* de ecuație

(7.1) $\quad \vec{r} = \vec{r}(s),\ s \in [0, L]$ cu $\dot{\vec{r}}^{\,2}(s) = 1$.

Variația acestui reper pe *C* este descrisă de variația vectorilor săi odată cu *s*, adică de vectori $\dot{\vec{t}}(s), \dot{\vec{n}}(s), \dot{\vec{b}}(s)$. Aceşti vectori se pot determina prin componentele lor relative fie la reperul inițial, fie la însuşi reperul Frenet $\Re_F$.

Ne vom ocupa de a doua exprimare pentru că este mai utilă şi mai interesantă, adică vom exprima vectorii $\dot{\vec{t}}(s), \dot{\vec{n}}(s), \dot{\vec{b}}(s)$ în reperul $\Re_F$. Exprimarea în reperul inițial se obține prin simple derivări in formulele (6.8). De exemplu, $\dot{\vec{t}}(s) = \ddot{x}(s)\vec{i} + \ddot{y}(s)\vec{j} + \ddot{z}(s)\vec{k}$, etc.

Formula a doua din (6.8) se poate rescrie în forma $\dot{\vec{t}}(s) = \left\|\ddot{\vec{r}}(s)\right\| \vec{n}(s)$.

Notăm

(7.2) $\quad k(s) = \left\|\ddot{\vec{r}}(s)\right\| \ s \in [0, L]$

şi rezultă

(7.3) $\quad \dot{\vec{t}}(s) = k(s)\vec{n}(s)$,

formulă care exprimă $\dot{\vec{t}}(s)$ în reperul $\Re_F$.

Din formula (7.2) rezultă $k(s) > 0\ \forall s \in [0, L]$.

Fie $\dot{\vec{b}} = p\vec{t} + q\vec{n} + r\vec{b}$, cu p, q, r funcții de *s*. Omitem *s* pentru simplificarea scrierii.

Proprietatea $\dot{\vec{b}}^{\,2} = 1$ implică $\left\langle \vec{b}, \dot{\vec{b}} \right\rangle = 0$ care, la rândul ei, conduce la $r = 0$. Din proprietatea $\left\langle \vec{b}, \vec{t} \right\rangle = 0$ rezultă $\left\langle \dot{\vec{b}}, \vec{t} \right\rangle + \left\langle \vec{b}, \dot{\vec{t}} \right\rangle = 0$. Înlocuind aici expresiile lui $\dot{\vec{t}}$ şi $\dot{\vec{b}}$ obținem $p = 0$. Aşadar avem $\dot{\vec{b}} = q\vec{n}$, de unde $q = \left\langle \dot{\vec{b}}, \vec{n} \right\rangle$. Introducem funcția

(7.4) $\tau(s) = -\left\langle \dot{\vec{b}}, \vec{n} \right\rangle,\ s \in [0, L].$

Cu această notație expresia lui $\dot{\vec{b}}$ devine

(7.5) $\dot{\vec{b}}(s) = -\tau(s)\vec{n}(s).$

Vom proceda asemănător pentru a exprima $\dot{\vec{n}}$ în reperul $\mathfrak{R}_F$. Punem $\dot{\vec{n}} = \alpha\vec{t} + \beta\vec{n} + \gamma\vec{b}$, cu α, β, γ funcții necunoscute, urmând a fi determinate.

Egalitatea $\left\langle \vec{n}, \dot{\vec{n}} \right\rangle = 0$ ne dă imediat $\beta = 0$. Proprietatea $\left\langle \vec{n}, \vec{t} \right\rangle = 0$ conduce prin derivare la ecuația $\left\langle \dot{\vec{n}}, \vec{t} \right\rangle + \left\langle \vec{n}, \dot{\vec{t}} \right\rangle = 0$, care, pe baza ecuației (7.3), ne arată că $\alpha + k = 0$, deci $\alpha = -k$. Similar, din $\left\langle \vec{n}, \vec{b} \right\rangle = 0$ obținem $\left\langle \dot{\vec{n}}, \vec{b} \right\rangle + \left\langle \vec{n}, \dot{\vec{b}} \right\rangle = 0$, de unde, folosind (7.5), obținem $\gamma - \tau = 0$, adică $\gamma = \tau$. Așadar avem

(7.6) $\dot{\vec{n}}(s) = -k(s)\vec{t}(s) + \tau(s)\vec{b}(s).$

Strângem la un loc formulele (7.3), (7.5), (7.6), numite și formulele lui Frenet pentru curba C, într-o singură formulă:

$$\text{(F)}\qquad \begin{cases} \dot{\vec{t}}(s) = k(s)\vec{n} \\ \dot{\vec{n}}(s) = -k(s)\vec{t} + \tau(s)\vec{b}(s) \\ \dot{\vec{b}}(s) = \quad -\tau(s)\vec{n}(s), \quad s \in [0, L]. \end{cases}$$

Funcția $k : [0, L] \to \mathbb{R},\ s \to k(s)$ se numește *funcția curbură* a curbei C. Valoarea ei într-un punct $P \in C$ se numește *curbura* curbei C în punctul P. Observăm că funcția curbură este strict pozitivă.

Funcția $\tau : [0, L] \to \mathbb{R},\ s \to \tau(s)$ se numește funcția torsiune a curbei. Valoarea ei într-un punct $P \in C$ se numește torsiunea curbei C în punctul P. Din (7.4) rezultă că această valoare poate fi pozitivă, negativă sau zero. Într-un punct fixat P al curbei, numerele $\frac{1}{k}$ și $\frac{1}{\tau}$, $\tau \neq 0$, se numesc *rază de curbură* și respectiv *rază de torsiune* în P.

Dacă introducem matricile formale $\begin{bmatrix}\vec{t}\\ \vec{n}\\ \vec{b}\end{bmatrix}$ şi $\frac{d}{ds}\begin{bmatrix}\vec{t}\\ \vec{n}\\ \vec{b}\end{bmatrix}:=\begin{bmatrix}\dot{\vec{t}}\\ \dot{\vec{n}}\\ \dot{\vec{b}}\end{bmatrix}$, formulele (F) ale lui Frenet se pot scrie compact

(F') $$\frac{d}{ds}\begin{bmatrix}\vec{t}\\ \vec{n}\\ \vec{b}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & k & 0\\ -k & 0 & \tau\\ 0 & -\tau & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vec{t}\\ \vec{n}\\ \vec{b}\end{bmatrix}.$$

Observăm că matricea pătratică ce apare în (F') este antisimetrică. Acest fapt este o consecinţă directă a faptului că reperul Frenet este ortonormat. (Exerciţiu.!)

În încheierea acestui paragraf menţionăm că, dacă introducem vectorul $\vec{d}=\tau\vec{t}+k\vec{b}$, numit şi vectorul lui Darboux, situat în planul rectificator, formulele lui Frenet se pot scrie şi în forma

(F'') $$\dot{\vec{t}}=\vec{d}\times\vec{t},\ \dot{\vec{n}}=\vec{d}\times\vec{n},\ \dot{\vec{b}}=\vec{d}\times\vec{b}.$$

§8. Interpretări geometrice ale funcţiei curbură şi funcţiei torsiune

Am asociat unei curbe în spaţiu două funcţii remarcabile k şi τ. Ne interesează semnificaţii geometrice ale lor.

Prezenţa versorilor $\vec{t}(s),\vec{n}(s),\vec{b}(s)$ sugerează următoarea construcţie: desenăm versorii $\vec{t}(s)$ cu originea în *O*, originea reperului fixat în E^3; extremităţile lor vor descrie o curbă pe sfera de rază 1 cu centrul în *O*, numită *indicatoarea sferică a tangentelor* curbei *C*. Similar se obţine *indicatoarea sferică a binormalelor* curbei *C* şi respectiv *indicatoarea sferică a normalelor principale ale* curbei *C*.

Indicatoarea sferică a tangentelor se poate reprezenta prin ecuaţia

(8.1) $$\vec{r}=\vec{t}(s),\ s\in[0,L]$$

(*s* este parametru natural pe *C* dar nu şi pe indicatoarea sferică a tangentelor!).

Fie *ds* diferenţiala funcţiei lungime de arc. Ne amintim că $s(t)=\int_{t_0}^{t}\left\|\vec{r}'(\tau)\right\|d\tau$ într-o parametrizare oarecare şi deci $ds=s'(t)dt=\left\|\vec{r}'(t)\right\|dt$.

Notăm prin ds_1 diferențiala funcției lungime de arc a indicatoarei sferice a tangentelor. Obținem $ds_1 = \frac{d\vec{t}}{ds}(s)ds = \left\|\ddot{\vec{r}}(s)\right\| ds = k(s)ds$, de unde

(8.2) $$k(P) = \frac{ds_1}{ds}.$$

Există şi o altă modalitate de a exprima (8.2). Fie $P(s)$ şi $Q(s+\Delta s)$ două puncte "vecine" pe *C*. Atunci lungimea arcului $\overset{\frown}{PQ}$ este $l\left(\overset{\frown}{PQ}\right) = \Delta s > 0$, suficient de mic. Fie punctele *P'* şi *Q'* pe indicatoarea sferică a tangentelor corespunzătoare punctelor *P* şi *Q*. Ele au vectorii de poziție $\vec{t}(s)$ respectiv $\vec{t}(s+\Delta s)$. După formula care dă lungimea unui arc de curbă, avem:

$$l\left(\overset{\frown}{P'Q'}\right) = \int_s^{s+\Delta s} \left\|\dot{\vec{t}}(\sigma)\right\| d\sigma = \int_s^{s+\Delta s} \left\|\ddot{\vec{r}}(\sigma)\right\| d\sigma = \int_s^{s+\Delta s} k(\sigma)d\sigma = k(\sigma_0)\Delta s,$$

după teorema de medie aplicată integralei în cauză, unde $\sigma_0 \in (s, s+\Delta s)$. Aşadar, rezultă $k(\sigma_0) = \frac{l\left(\overset{\frown}{P'Q'}\right)}{l\left(\overset{\frown}{PQ}\right)}$ şi pentru $\Delta s \to 0$ obținem

(8.3) $$k(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{l\left(\overset{\frown}{P'Q'}\right)}{\Delta s}.$$

Formula a treia a lui Frenet ne arată că se vor obține interpretări similare pentru torsiune, înlocuind indicatoarea sferică a tangentelor cu indicatoarea sferică a binormalelor.

Într-adevăr, dacă notăm cu ds_2 diferențiala funcției lungime de arc a indicatoarei binormalelor, obținem

(8.4) $$|\tau(P)| = \frac{ds_2}{ds},$$

(8.5) $$|\tau(s)| = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{l\left(\overset{\frown}{P'Q'}\right)}{\Delta s},$$

unde *P'*, *Q'* sunt punctele de pe indicatoarea sferică a binormalelor, corespunzătoare punctelor $P(s)$ şi $Q(s+\Delta s)$ de pe *C*.

Continuăm să considerăm punctele "vecine" $P(s)$ şi $Q(s+\Delta s)$ pe curba *C*. Notăm prin $\Delta\omega$ unghiul dintre vectorii $\vec{t}(s)$ şi $\vec{t}(s+\Delta s)$. Are loc formula

(8.6) $$k(s) = \lim_{\Delta s \to 0} \left|\frac{\Delta\omega}{\Delta s}\right|.$$

Pentru demonstrație, observăm că dacă desenăm vectorii $\vec{t}(s)$ şi $\vec{t}(s+\Delta s)$ cu originea în acelaşi punct, obținem un triunghi isoscel cu unghiul de la vârf $\Delta\omega$ şi latura opusă de lungime $\left|\vec{t}(s+\Delta s)-\vec{t}(s)\right|$. Rezultă imediat că $2\sin\frac{\Delta\omega}{2}=\left|\vec{t}(s+\Delta s)-\vec{t}(s)\right|$. Împărțim ambii membrii ai acestei relații la Δs şi trecem la module (de numere reale). Obținem $\left|\frac{\sin\frac{\Delta\omega}{2}}{\frac{\Delta s}{2}}\right|=\left\|\frac{\vec{t}(s+\Delta s)-\vec{t}(s)}{\Delta s}\right\|$, egalitate în care trecem la limită pentru $\Delta s\to 0$. Termenul din dreapta are limită pentru că am presupus curba C reprezentată prin funcții diferențiabile de orice clasă C^k (aici este suficient să luăm $k\geq 2$) şi limita sa este $\left\|\dot{\vec{t}}(s)\right\|=k(s)$. Aşadar şi termenul din stânga are limită pentru $\Delta s\to 0$. Avem $\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\sin\frac{\Delta\omega}{2}}{\frac{\Delta s}{2}}\right|=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\sin\frac{\Delta\omega}{2}}{\frac{\Delta\omega}{2}}\cdot\frac{\Delta\omega}{\Delta s}\right|=\lim\limits_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\omega}{\Delta s}\right|$, pentru că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Rezultă (8.6).

Fie acum $\Delta\psi$ unghiul vectorilor $\vec{b}(s)$ şi $\vec{b}(s+\Delta s)$. În mod cu totul similar se arată că are loc următoarea interpretare geometrică a torsiunii:

$$(8.7)\qquad |\tau(s)|=\lim_{\Delta s\to 0}\left|\frac{\Delta\psi}{\Delta s}\right|.$$

§9. Formule de calcul pentru curbură şi torsiune

Funcțiile curbură şi torsiune au fost introduse prin formulele lui Frenet, în parametrizare naturală. Această parametrizare este foarte utilă în rezolvarea unor probleme teoretice dar se obține greu sau chiar nu se poate explicita plecând de la o parametrizare oarecare a curbei. Încât avem nevoie de exprimări ale curburii şi torsiunii în parametrizări oarecare. Aceste exprimări se vor numi formule de calcul.

Amintim că am definit curbura prin

$$(9.1)\qquad k(s)=\left\|\ddot{\vec{r}}(s)\right\|=\sqrt{\ddot{x}^2(s)+\ddot{y}^2(s)+\ddot{z}^2(s)}.$$

Egalitatea $\left(\dot{\vec{r}}\times\ddot{\vec{r}}\right)^2=\dot{\vec{r}}^2\,\ddot{\vec{r}}^2-\left\langle\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}}\right\rangle^2$ ne arată că avem şi

(9.2) $$k(s)=\left\|\dot{\vec{r}}(s)\times\ddot{\vec{r}}(s)\right\|.$$

Fie pe curba C o parametrizare oarecare cu parametrul t. Amintim că $\frac{ds}{dt}=\left\|\vec{r}\,'(t)\right\|$ şi că pentru inversa aplicației $t\to s(t)$ notată prin $h:s\to t=h(s)$ avem $\frac{dh}{ds}=\frac{1}{\left\|\vec{r}\,'(h(s))\right\|}$.

Fie $\vec{r}=\vec{r}(s)=\vec{r}(h(s))$ cu $t=h(s)$ şi $t\to\vec{r}(t)$ ecuația curbei C în parametrizarea cu t. Avem:

$$\dot{\vec{r}}(h(s))=\frac{d\vec{r}}{ds}(h(s))=\frac{d\vec{r}}{dt}(h(s))\frac{dh(s)}{ds}=\vec{r}\,'(h(s))\frac{1}{\left\|\vec{r}\,'(h(s))\right\|}$$

$$\ddot{\vec{r}}(h(s))=\vec{r}\,''(h(s))\cdot\left(\frac{dh(s)}{ds}\right)^2+\vec{r}\,'(h(s))\frac{d^2h(s)}{ds^2}.$$

Nu-i nevoie să calculăm $\frac{d^2h(s)}{ds^2}$ pentru că nu mai apare în

$$\dot{\vec{r}}(h(s))\times\ddot{\vec{r}}(h(s))=\left(\vec{r}\,'(h(s))\times\vec{r}\,''(h(s))\right)\frac{1}{\left\|\vec{r}\,'(h(s))\right\|^3}.$$

Aşadar avem:

$$k(h(s))=\frac{\left\|\vec{r}\,'(h(s))\times\vec{r}\,''(h(s))\right\|}{\left\|\vec{r}\,'(h(s))\right\|^3}.$$

Cu $t=h(s)$ obținem formula de calcul a curburii

(9.3) $$k(t)=\frac{\left\|\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\right\|}{\left\|\vec{r}\,'(t)\right\|^3}.$$

Formulele lui Frenet sunt utile pentru a calcula produsul mixt $a(s)=\left(\dot{\vec{r}}(s),\ddot{\vec{r}}(s),\dddot{\vec{r}}(s)\right)$. Avem: $a(s)=\left(\vec{t},k\vec{n},\dot{k}\vec{n}+k\dot{\vec{n}}\right)=\left(\vec{t},k\vec{n},-k^2\vec{n}+k\tau\vec{b}\right)=k^2\tau\left(\vec{t},\vec{n},\vec{b}\right)=k^2\tau$. Rezultă

(9.4) $$\tau(s)=\frac{\left(\dot{\vec{r}}(s),\ddot{\vec{r}}(s),\dddot{\vec{r}}(s)\right)}{k^2(s)}.$$

Am folosit proprietatea că produsul mixt a trei vectori este nul dacă vectorii sunt coplanari. Această proprietate se va folosi repetat mai jos.

Formula (9.4) ne va permite să stabilim o formulă de calcul pentru torsiune. Procedăm ca în cazul curburii şi folosim aceleaşi notații. Derivând încă odată în formula care dă $\ddot{\vec{r}}\left(h(s)\right)$, obținem

$$\dddot{\vec{r}}\left(h(s)\right)=\vec{r}\,'''\left(h(s)\right)\left(\frac{dh}{ds}\right)^3+3\vec{r}\,''\left(h(s)\right)\frac{dh}{ds}\frac{d^2h}{ds^2}+\vec{r}\,'\left(h(s)\right)\frac{d^3h}{ds^3}.$$

Înlocuind în (9.4) vectorii $\dot{\vec{r}}\left(h(s)\right)$, $\ddot{\vec{r}}\left(h(s)\right)$, $\dddot{\vec{r}}\left(h(s)\right)$ şi $k\left(h(s)\right)$, după o simplificare prin $\left(\frac{dh}{ds}\right)^6$ şi revenind la $t=h(s)$ se obține

$$\tau(t)=\frac{\left(\vec{r}\,'(t),\vec{r}\,''(t),\vec{r}\,'''(t)\right)}{\left(\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t)\right)^2}. \tag{9.5}$$

Aceasta este formula de calcul a torsiunii unei curbe în spațiu.

Observații:

1. Interpretarea geometrică (8.6) a curburii ne arată că aceasta este independentă de reperul din spațiu şi de parametrizarea curbei pentru că $\Delta\omega$ şi Δs au această proprietate. Similar, din (8.7) observăm că nici torsiunea nu depinde de reperul din spațiu şi nici de parametrizarea curbei. Se spune că funcțiile k şi τ sunt invarianți ai curbei.

2. Amintim că reperul Frenet este bine determinat numai în punctele neinflexionare. Funcția curbură apare în procesul de variație a acestui reper. Formulele (9.2) şi respectiv (9.3) ne arată că putem defini curbura şi în puncte inflexionare, luând-o egală cu zero în acele puncte. Rezultă că dreapta în spațiu este curbă de curbură nulă şi după Teorema 4.1, dacă o curbă în spațiu are curbura nulă, ea este un segment deschis de dreaptă sau o dreaptă.

3. Formula de calcul a torsiunii (9.5) ne arată că torsiunea (în puncte neinflexionare) este pozitivă dacă baza $\left(\vec{r}\,',\vec{r}\,'',\vec{r}\,'''\right)$ este drept (pozitiv) orientată şi este negativă în caz contrar.

Torsiunea, definită în punctele neinflexionare, se poate defini ca având valoarea zero în punctele inflexionare. Dar ea poate avea valoarea zero şi în puncte neinflexionare şi anume în acele puncte în care vectorii $\vec{r}\,',\vec{r}\,'',\vec{r}\,'''$ sunt liniar dependenți. Dacă se întâmplă ca o curbă C să fie într-un plan, care printr-o schimbare a reperului în spațiu se poate lua $z=0$, atunci C se reprezintă prin ecuațiile $x=x(t), y=y(t), z=0$ şi avem $\vec{r}\,'=(x',y',0)$, $\vec{r}\,''=(x'',y'',0)$, $\vec{r}\,'''=(x''',y''',0)$ şi formula (9.5) ne dă $\tau\equiv 0$. Aşadar orice curbă plană este cu

torsiune nulă. Mai sunt şi alte curbe de torsiune nulă? Răspunsul este negativ pentru că are loc.

Teorema 9.1. *Orice curbă cu funcția de torsiune nulă este o curbă plană.*

Demonstrație. Dacă $\tau \equiv 0$, formula a treia a lui Frenet ne dă $\dot{\vec{b}}(s) = \vec{0}$. Aşadar $\vec{b}(s) = \vec{b}_0$ (vector constant). Această observație în combinație cu $\langle \vec{b}_0, \vec{t}(s) \rangle = 0$, ne arată că $\frac{d}{ds}\langle \overrightarrow{b_0}, \vec{r}(s) \rangle = 0$, deci $\langle \vec{r}(s), \overrightarrow{b_0} \rangle = c \in \mathbb{R}$. Aşadar vectorul $\vec{r}(s)$, care este vectorul de poziție al unui punct de pe curbă, verifică ecuația $\langle \vec{r}, \overrightarrow{b_0} \rangle - c = 0$, care este ecuația unui plan de direcția normală dată de $\overrightarrow{b_0}$. În concluzie, curba cu $\tau \equiv 0$ este situată într-un plan care este plan osculator pentru toate punctele neinflexionare ale curbei. ■

După cum am văzut mai sus, unei curbe în spațiu putem să-i asociem funcțiile de curbură şi torsiune, funcția curbură fiind strict pozitivă. Aceste funcții sunt intrinsec asociate curbei în sensul că ele nu depind de reperul ales în spațiu şi nici de parametrizarea de pe curbă. Mai mult, funcțiile curbură şi torsiune determină curba în sensul teoremei care urmează.

Teoremă (fundamentală a geometriei curbelor în spațiu).

Fie două funcții reale $\kappa, \tau : [0, L] \to \mathbb{R}$, $s \to \kappa(s)$, $s \to \tau(s)$ *cu* $\kappa(s) > 0$ $\forall s \in [0, L]$, *continue. Există atunci o curbă în spațiu, dată prin ecuația* $\vec{r} = \vec{r}(s)$, $s \in [0, L]$, *cu s parametru natural, pentru care* κ *este funcția curbură şi* τ *este funcția torsiune. Mai mult, dacă* C_0 *şi* C_1 *sunt două asemenea curbe există o deplasare unică D în spațiul* E^3 *încât* $C_1 = D(C_0)$.

Pentru demonstrație se poate consulta [1, p.65].

CAPITOLUL 3

SUPRAFEȚE

Rezumat. Se defineşte noțiunea de suprafață şi se dau reprezentările analitice: $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$, $\vec{r_u}\times\vec{r_u}\neq\vec{0}$, $(u,v)\in D\subseteq\mathbb{R}^2$ (parametrică), $z=f(x,y),(x,y)\in A\subseteq\mathbb{R}^2$ (explicită), $F(x,y,z)=0, F_x^2+F_y^2+F_z^2>0$, $(x,y,z)\in V\subseteq\mathbb{R}^3$ (implicită). Se defineşte planul tangent într-un punct P al unei suprafețe S ca planul prin P care conține vectorii necoliniari $\vec{r_u}$ şi $\vec{r_v}$. Forma I-a fundamentală se defineşte ca restricția produsului scalar la spațiul tangent în P la S. Se descriu proprietățile ei şi aplicațiile ei la calcularea lungimii curbelor pe S, a unghiului a două curbe pe S şi a ariei unei porțiuni date din S. Vectorii $\vec{r_u}\equiv\vec{h_1},\vec{r_v}\equiv\vec{h_2}$ şi $\vec{N}=\dfrac{\vec{h_1}\times\vec{h_2}}{\left|\vec{h_1}\times\vec{h_2}\right|}$ formează un reper (Gauss) mobil pe S. Variația acestui reper este dată de formulele lui Gauss: $\dfrac{\partial\vec{h_i}}{\partial u^j}=\sum\limits_{k=1}^{2}\Gamma_{ij}^k\vec{h_k}+b_{ij}\vec{N}$ şi formulele lui Weingarten: $\dfrac{\partial\vec{N}}{\partial u^i}=-\sum\limits_{j=1}^{2}A_i^j\vec{h_j}$, cu i,j = 1,2. Aceste formule introduc coeficienții $(b_{ij}=b_{ji})$ ai celei de a II-a forme fundamentale şi operatorul Weingarten de matrice (A_j^i) în baza $(\vec{h_1},\vec{h_2})$. Se introduc curburile principale ca soluții ale ecuației $(g_{11}g_{22}-g_{12}^2)k^2-(g_{11}b_{22}-2g_{12}b_{12}+g_{21}b_{11})k+b_{11}b_{22}-b_{12}^2=0$ şi se defineşte curbura totală a unei suprafețe: $K=k_1k_2=\dfrac{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}{g_{11}g_{22}-g_{11}^2}$ şi curbura medie $H=\dfrac{1}{2}(k_1+k_2)$. Se deduc ecuațiile lui Gauss şi apoi ecuațiile Peterson – Mainardi – Codazzi. Se anunță teorema fundamentală a suprafețelor prin care se arată că formele I-a şi a II-a fundamentale determină suprafața S.

§1. Definiția suprafeței în spațiul euclidian E^3.

Fie spațiul euclidian E^3 dotat un reper ortonormat, pozitiv orientat $\Re=\{O,(\vec{i},\vec{j},\vec{k})\}$.

Definiția 1.1. *O submulțime S din* E^3 *se numeşte* ***suprafață elementară*** *dacă* $S=h(U)$, $U\subseteq\mathbb{R}^2$ *mulțime deschisă şi aplicația* $h:U\to E^3$ *este o scufundare diferențiabilă de clasă* $C^s\ (s\geq1)$ *a lui U în* E^3. *Perechea* (U,h) *se numeşte parametrizare a suprafeței elementare S.*

Vom nota prin $\vec{r}:U\to\mathbb{R}^3$ sau prin $\vec{h}:U\to\mathbb{R}^3$ funcția vectorială definită de aplicația h, adică dacă pentru $(u,v)\in U$ punem $h(u,v)=P(u,v)\in S$, atunci

$$\vec{r}(u,v)=\overrightarrow{OP}(u,v)=x(u,v)\vec{i}+y(u,v)\vec{j}+z(u,v)\vec{k},$$

cu funcțiile coordonate *x, y, z* diferențiabile de clasă $C^s\ (s\geq 1)$. Amintim că *h* este scufundare pe *U* dacă este imersie pe *U* și homeomorfism pe imagine. Condiția de imersie pe *U* este ca

$$\text{(1.1)}\qquad rang\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}=2 \text{ pe } U.$$

Amintim că prin $x_u, x_v, x_{uu}, x_{uv}, x_{vv}...$ notăm derivatele parțiale ale funcțiilor în raport cu variabilele indicate de indicii de jos.

Condiția (1.1) este echivalentă cu

$$\text{(1.2)}\qquad \vec{r_u}\times\vec{r_v}\neq\vec{0} \text{ pe } U.$$

Fie $\widetilde{U}\subseteq\mathbb{R}^2$ mulțime deschisă și aplicația bijectivă $\varphi:\widetilde{U}\to U$ dată de ecuațiile

$$\text{(1.3)}\qquad \begin{aligned} u&=u\left(\tilde{u},\tilde{v}\right),\\ v&=v\left(\tilde{u},\tilde{v}\right),\ \left(\tilde{u},\tilde{v}\right)\in\widetilde{U}, \end{aligned}$$

un difeomorfism de clasă $C^s\ (s\geq 1)$. Condiția ca φ să fie difeomorfism implică

$$\text{(1.4)}\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial\tilde{u}} & \dfrac{\partial u}{\partial\tilde{v}} \\ \dfrac{\partial v}{\partial\tilde{u}} & \dfrac{\partial v}{\partial\tilde{v}} \end{vmatrix}\neq 0 \text{ pe } \widetilde{U}.$$

Reciproc, dacă aplicația bijectivă $\varphi:\widetilde{U}\to U$ este de clasă $C^s\ (s\geq 1)$ și verifică (1.4) atunci ea este difeomorfism de clasă $C^s\ (s\geq 1)$.

Propoziția 1.1. *Fie S suprafață elementară cu parametrizarea* (U,h) *și un difeomorfism* $\varphi:\widetilde{U}\to U$ *de clasă* $C^s\ (s\geq 1)$. *Atunci perechea* $\left(\widetilde{U},\tilde{h}=h\circ\varphi\right)$ *este o nouă parametrizare a suprafeței elementare S.*

Demonstrație. Observăm mai întâi că pentru $\tilde{h}:\widetilde{U}\to E^3$ avem $\tilde{h}\left(\widetilde{U}\right)=h\left(\varphi\left(\widetilde{U}\right)\right)=h(U)=S$. Aplicația $\tilde{h}$ este diferențiabilă de clasă C^s pentru că este compusa a două aplicații diferențiabile de clasă C^s. Ea este și homeomorfism pe imagine pentru că este compusa a două homeomorfisme pe imagine. Rămâne să

arătăm că $\tilde{h}$ este imersie pe $\widetilde{U}$. Notăm prin $\vec{h}$ aplicația vectorială asociată ei. Avem

$$\vec{h}(\tilde{u},\tilde{v}) = \vec{r}\left(u(\tilde{u},\tilde{v}), v(\tilde{u},\tilde{v})\right). \tag{1.5}$$

Regula de derivare compusă se extinde, pe componente, la funcții vectoriale încât derivând în (1.5) obținem

$$\begin{cases} \overrightarrow{h_{\tilde{u}}} = \vec{r}_u \dfrac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \vec{r}_v \dfrac{\partial v}{\partial \tilde{u}}, \\ \overrightarrow{h_{\tilde{v}}} = \vec{r}_u \dfrac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + \vec{r}_v \dfrac{\partial v}{\partial \tilde{v}}. \end{cases} \tag{1.6}$$

Având în vedere proprietățile produsului vectorial rezultă

$$\overrightarrow{h_{\tilde{u}}} \times \overrightarrow{h_{\tilde{v}}} = \left(\overrightarrow{r_u} \times \overrightarrow{r_v}\right) \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial \tilde{u}} & \dfrac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \\ \dfrac{\partial v}{\partial \tilde{u}} & \dfrac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \end{vmatrix}. \tag{1.7}$$

Aşadar $\overrightarrow{h_{\tilde{u}}} \times \overrightarrow{h_{\tilde{v}}} \neq \vec{0}$ pe $\widetilde{U}$. ■

Aplicația φ se numeşte schimbare de parametrizare sau de parametri pe *S*.

Definiția 1.2. *O submulțime* $\mathbb{S}$ *în* E^3 *se numeşte* ***suprafață*** *dacă orice punct al ei aparține cel puțin unei suprafețe elementare conținută în* $\mathbb{S}$.

§2. Reprezentări analitice ale suprafețelor

Fie $D \subseteq \mathbb{R}^2$ o mulțime deschisă şi $f : D \to \mathbb{R}$, $(x,y) \to z = f(x,y)$, o funcție reală de două variabile reale. Mulțimea $G_f = \{(x,y,f(x,y)) | (x,y) \in D\}$ se numeşte graficul (graful) lui *f*.

Teorema 2.1. *Fie* $f : D \to \mathbb{R}$ *funcție diferențiabilă de clasă* $C^s\ (s \geq 1)$. *Graficul ei* G_f *este suprafață elementară în* E^3.

Demonstrație. Fie aplicația $h : D \to E^3$ care asociază unui punct $(x,y) \in D$, punctul $P \in E^3$ de coordonate $(x,y,f(x,y))$. Este evident că $h(D) = G_f$. Aplicația vectorială $\vec{h} : D \to \mathbb{R}^3$ asociază lui (x,y) vectorul de componente $(x,y,f(x,y))$. Această aplicație este diferențiabilă de clasă $C^s\ (s \geq 1)$. Ea este imersie pe *D* pentru că matricea Jacobiană

$$J_h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_x & f_y \end{pmatrix}$$

are evident rangul 2 pe D. Mai mult, aplicația h este homeomorfism pe imagine, inversa ei fiind aplicația care asociază punctului $P\left(x, y, f\left(x, y\right)\right)$, perechea $\left(x, y\right) \in D$, aplicație care este evident continuă. Am arătat astfel că $\left(D, h\right)$ este o parametrizare pentru G_f, deci G_f este suprafață elementară. ■

Observația 2.1. *Similar se arată că mulțimile de puncte* $\left\{P\left(x, \varphi\left(x, z\right), z\right)\right\}$ *și* $\left\{P\left(\psi\left(y, z\right), y, z\right)\right\}$, *unde* φ *și* ψ *sunt funcții asemănătoare cu f, sunt suprafețe elementare în* E^3.

Teorema 2.1 ne permite să spunem că ecuația

(2.1) $\quad z = f\left(x, y\right),\ \left(x, y\right) \in D \subseteq \mathbb{R}^2$, D mulțime deschisă,

reprezintă analitic o suprafață (elementară).

Similar, ecuațiile

(2.1') $\quad y = \varphi\left(x, z\right),\ \left(x, z\right) \in D' \subseteq \mathbb{R}^2$,

(2.1'') $\quad x = \psi\left(y, z\right),\ \left(y, z\right) \in D'' \subseteq \mathbb{R}^2$, D' şi D'' mulțimi deschise,

reprezintă analitic suprafețe (elementare) în E^3.

În aceste reprezentări funcțiile f, φ, ψ sunt desigur diferențiabile de clasă $C^s\left(s \geq 1\right)$. Pentru că în continuare vom lucra numai cu funcții diferențiabile de o clasă suficient de înaltă pentru a ne asigura de existența derivatelor necesare în calcul, vom omite a preciza de fiecare dată acest lucru.

Reprezentările analitice (2.1), (2.1') şi (2.1'') se numesc *reprezentări explicite* ale unei suprafețe (elementare).

Teorema 2.2. *Mulțimea* $\mathbb{S} = \left\{P\left(\vec{r}\right) \middle| \vec{r} = \vec{r}\left(u, v\right),\ \left(u, v\right) \in U \subseteq \mathbb{R}^2, U\right.$ *mulțime deschisă, cu funcția vectorială* $\vec{r}$ *diferențiabilă de clasă* $C^s\left(s \geq 1\right)$ *pe* U *și* $\left.\vec{r_u} \times \vec{r_v} \neq \vec{0} \text{ pe } U\right\}$ *este suprafață în* E^3.

Demonstrație. Vom arăta că orice punct din $\mathbb{S}$ aparține cel puțin unei suprafețe elementare inclusă în $\mathbb{S}$. Fie $P_0\left(\vec{r_0}\left(u_0, v_0\right)\right) \in \mathbb{S}$. Deci $\left.\vec{r_u} \times \vec{r_v}\right|_{\left(u_0, v_0\right)} \neq \vec{0}$, ceea ce înseamnă că cel puțin una dintre cele trei componente ale vectorului $\vec{r_u} \times \vec{r_v}$ este diferită de zero în punctul $\left(u_0, v_0\right)$. Să presupunem că $\left.\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}\right|_{\left(u_0, v_0\right)} \neq 0$.

Continuitatea funcțiilor în discuție ne asigură că există un deschis U_0 care conține punctul (u_0, v_0) şi este inclus în U pe care $\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \neq 0$.

Teorema de inversare locală ne arată că sistemul de ecuații

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v), \ (u,v) \in U_0 \end{cases}$$

se poate rezolva în raport cu u şi v şi se obțin soluții diferențiabile de clasă C^s de forma

$$\begin{cases} u = u(x,y) \\ v = v(x,y), \ (x,y) \in D, \end{cases}$$

unde D este o mulțime deschisă în $\mathbb{R}^2$, ce conține punctul de coordonate $(x_0 = x(u_0,v_0), y_0 = y(u_0,v_0))$. Înlocuim aceste soluții în ecuația $z = z(u,v)$ şi obținem

$$z = z(u(x,y), v(x,y)) = f(x,y), \ (x,y) \in D.$$

Funcția $f : D \to \mathbb{R}$ este diferențiabilă de clasă C^s fiind o compunere de funcții diferențiabile de clasă C^s.

Considerăm graficul G_f al funcției *f*. După Teorema 2.1, G_f este suprafață elementară. Punctul $P_0 \in G_f$ pentru că are coordonatele $(x(u_0,v_0), y(u_0,v_0), z(u_0,v_0))$ care, cu notațiile de mai sus, având în vedere şi că $u(x_0,y_0) = u_0, \ v(x_0,y_0) = v_0$, devin $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$. În plus, G_f este conținută în $\mathbb{S}$ pentru că pentru orice $(u,v) \in U_0$, coordonatele $(x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ se pot exprima în forma $(x, y, f(x,y))$.

În cazul în care $\begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = 0$ pe U, cel puțin unul dintre determinanții $\begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}$ este diferit de zero în (u_0, v_0). Un raționament similar ne va arăta că punctul P_0 aparține sau unei suprafețe elementare $\{P(x, \varphi(x,z), z)\}$ sau unei suprafețe elementare de forma $\{P(\psi(y,z), y, z)\}$ cu φ şi ψ funcții diferențiabile pe deschişi din $\mathbb{R}^2$, suprafețe elementare conținute în $\mathbb{S}$. ■

Teorema 2.2 ne arată că

(2.2) $\quad \vec{r} = \vec{r}(u,v), \ \vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0} \ \forall (u,v) \in U \subseteq \mathbb{R}^2,$

U mulțime deschisă, ne dă o reprezentare analitică a unei suprafețe în E^3. Această reprezentare se numeşte *reprezentare vectorial – parametrică* a unei suprafețe în E^3. Numerele *u, v* se numesc parametri pe suprafață. O pereche (u,v) determină unic un punct *P* de pe suprafață. Vom scrie $P(u,v)$.

Reprezentarea (2.2) are forma scalară

$$\text{(2.2')} \qquad \begin{cases} x = x(u,v), \\ y = y(u,v), \\ z = z(u,v), \end{cases} \quad \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix}^2 > 0$$

pe mulțimea deschisă $U \subseteq \mathbb{R}^2$.

Reprezentarea dată de ecuațiile (2.2') se numeşte *reprezentare parametrică* a suprafeței.

Teorema 2.3. *Mulțimea* $\mathbb{S} = \{P(x,y,z) | F(x,y,z) = 0, \ cu \ F : V \to \mathbb{R}$ *funcție diferențiabilă de clasă* C^s *pe un deschis* $V \subseteq \mathbb{R}^3$ *şi* $F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 > 0$ *pe* $V\}$, *dacă este nevidă, este o suprafață în* E^3.

Demonstrație. Fie $P_0(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{S}$, deci $F(x_0,y_0,z_0) = 0$. Să presupunem că $F_z\big|_{P_0} \neq 0$. Rezultă că $F_z \neq 0$ pe o mulțime deschisă V_0 ce conține P_0 şi este inclusă în *V*. După o eventuală micşorare, mulțimea V_0 se poate scrie în forma $V_0 = U \times I$, unde *U* este o mulțime deschisă în $\mathbb{R}^2$ centrată în (x_0, y_0) şi *I* un interval deschis centrat în z_0. Teorema funcțiilor implicite ne asigură că în aceste condiții ecuația $F(x,y,z) = 0$ se poate rezolva în raport cu *z*, adică există o funcție diferențiabilă de clasă C^s, $f : U \to I$, încât

$$1^\circ \ f(x_0,y_0) = z_0 \qquad\qquad 2^\circ \ F(x,y,f(x,y)) = 0 \text{ pe } U.$$

Considerăm graficul G_f al funcției *f*. După Teorema 1.2, G_f este suprafață elementară. Condiția 1° ne asigură că $P_0 \in G_f$ iar condiția 2° ne arată că $G_f \subset \mathbb{S}$. Dacă $F_z = 0$ pe V atunci fie $F_x\big|_{P_0} \neq 0$, fie $F_y\big|_{P_0} \neq 0$. Un raționament analog ne arată că P_0 aparține fie unei suprafețe elementare $\{P(x, \varphi(x,z), z)\}$ fie unei suprafețe elementare $\{P(\psi(y,z), y, z)\}$, cu funcțiile φ şi ψ diferențiabile pe deschişi din $\mathbb{R}^2$, ambele incluse în $\mathbb{S}$. ■

După Teorema 2.3, condițiile

(2.3) $F(x,y,z)=0,\ F_x^2+F_y^2+F_z^2>0$ pe V mulțime deschisă în $\mathbb{R}^2$, reprezintă analitic o suprafață. Această reprezentare se numeşte reprezentare **implicită**.

Putem spune, în concluzie, că o suprafață în E^3 se poate reprezenta analitic în trei moduri: explicit, parametric şi implicit.

Aceste trei reprezentări analitice sunt local echivalente în sensul că orice punct P al unei suprafețe aparține unei suprafețe elementare care se poate reprezenta în toate cele trei moduri posibile.

Într-adevăr, dacă P este pe o suprafață elementară dată explicit în forma $z=f(x,y)$, cu notația $F(x,y,z)=z-f(x,y)$ această suprafață o putem gândi dată implicit în forma $F(x,y,z)=0$, pentru că $F_x^2+F_y^2+F_z^2=1+f_x^2+f_y^2\neq 0$. Pe de altă parte aceeaşi suprafață elementară se poate gândi ca dată parametric în forma $\begin{cases} x=u, \\ y=v, \\ z=f(u,v), \end{cases}$ pentru că suma de determinați la pătrat din (2.2') este aici $1+f_x^2+f_y^2>0$.

Dacă P este pe o suprafață dată implicit, Teorema 2.3 ne arată cum să ajungem la forma explicită. În cazul în care P este pe o suprafață dată parametric, Teorema 2.2 ne indică modul de explicitare.

În practică se folosesc toate cele trei reprezentări analitice. În probleme teoretice reprezentarea parametrică se dovedeşte mai utilă. Aceasta va fi folosită cu precădere în cele ce urmează pentru a prezenta geometria diferențială euclidiană a suprafețelor.

Prin geometria diferențială euclidiană a suprafețelor înțelegem proprietățile suprafețelor şi mărimile, construcțiile asociate suprafețelor, care sunt invariante la izometriile spațiului euclidian E^3 şi la schimbările de parametrii pe suprafață. Vom spune despre o proprietate a suprafeței sau o mărime asociată ei că are *caracter geometric* sau, simplu, că este *geometrică* dacă nu depinde, nu este modificată, de izometriile lui E^3 şi de nici o reparametrizare a suprafeței. În continuare vom prezenta, studia, folosi şi aplica *numai* proprietăți *geometrice* ale suprafețelor chiar dacă acest lucru nu va fi menționat întotdeauna în mod explicit. Cititorul este invitat să verifice caracterul geometric al proprietăților şi mărimilor întâlnite.

Fie E^3 dotat cu un reper ortonormat $\mathfrak{R}=\left\{O,\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)\right\}$ pozitiv orientat şi un punct $P(x,y,z)$, x,y,z fiind coordonate în reperul R .

O izometrie a lui E^3 cu păstrarea orientării transformă $P(x,y,z)$ într-un punct $P'(x',y',z')$ şi reperul R într-un reper ortonormat la fel orientat $\mathsf{R}'=\left\{O',\left(\vec{i}',\vec{j}',\vec{k}'\right)\right\}$. Cum (x',y',z') sunt coordonatele lui P' în reperul R', formulele care dau analitic izometria sunt identice cu formulele de trecere de la reperul R la reperul R'. Încât putem substitui izometria care mută punctul P în punctul P' cu o schimbare de repere ortonormate care lasă P nemişcat dar schimbă coordonatele sale (x,y,z) în (x',y',z'). Rezultă că pentru a ne asigura că o proprietate a suprafeței exprimată cu ajutorul unui reper ortonormat este invariantă la izometrii, este suficient să verificăm că este invariantă la schimbarea reperului ortonormat folosit în exprimarea ei.

Fie, de exemplu, o suprafață reprezentată analitic în reperul R prin $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$, $(u,v)\in U$, $\vec{r_u}\times\vec{r_v}\neq\vec{0}$ pe U unde funcția vectorială $\vec{r}$ este diferențiabilă de clasă $C^s\,(s\geq 1)$. Această proprietate de diferențiabilitate este invariantă la izometriile spațiului, pentru că este invariantă la schimbarea reperului R în reperul R'. Într-adevăr, în R' punctul $P\left(\vec{r}(u,v)\right)$ are vectorul de poziție $\vec{\rho}(u,v)$ dat de formula $\vec{\rho}(u,v)=\overrightarrow{O'O}+\vec{r}(u,v)$, cu $\overrightarrow{OO'}$ independent de (u,v). Este evident că funcția vectorială $\vec{\rho}$ se poate deriva până la ordinul s şi în plus derivatele ei coincid cu cele ale funcției vectoriale $\vec{r}$. Ca o consecință avem că $\overrightarrow{\rho_u}\times\overrightarrow{\rho_v}=\vec{r_u}\times\vec{r_v}\neq\vec{0}$ şi deci şi proprietatea $\vec{r_u}\times\vec{r_v}\neq\vec{0}$ este invariantă la (păstrată de) izometriile spațiului E^3. Proprietățile menționate sunt invariante şi la schimbări de parametrii pe suprafață. Pentru a se convinge, cititorul este invitat să revadă demonstrația Propoziției 1.1.

§3. Curbe pe o suprafață

În continuare vom studia numai proprietăți punctuale şi locale ale suprafețelor şi ca atare ne vom limita la a considera numai suprafețe elementare numite simplu suprafețe şi notate de obicei cu S. Amintim că cele trei reprezentări analitice pentru S sunt echivalente şi vor fi folosite alternativ, după nevoile de raționament sau de calcul.

Fie suprafața $S=h(U)$ cu U mulțime deschisă în $\mathbb{R}^2$ şi $h:U\to E^3$ scufundare diferențiabilă de clasă $C^s\,(s\geq 1)$.

Definiția 3.1. *Se numeşte curbă pe S imaginea prin h a unui arc elementar c din U.*

Fie $c=\gamma(I)$ unde I este un interval deschis în $\mathbb{R}$ şi γ o scufundare a lui I în $\mathbb{R}^2$ identificat cu E^2 prin alegerea unui reper ortonormat. Rezultă că $C=h(\gamma(I))$ este o curbă pe S. (Fig. 21)

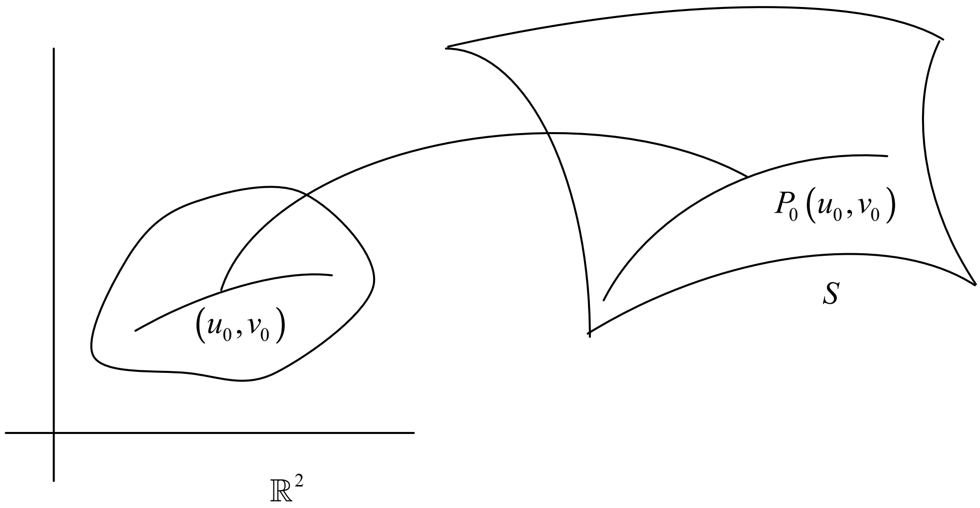

Fig. 21

Arcul elementar c se poate reprezenta analitic în formele echivalente:

(3.1) $$\begin{cases} u=u(t) \\ v=v(t),\ u'^2+v'^2>0 \text{ pe } I, \end{cases}$$

(3.2) $v=f(u)$ sau $u=g(v)$, f,g funcții reale de o variabilă reală,

(3.3) $F(u,v)=0,\ F_u^2+F_v^2>0,\ (u,v)\in D\subseteq\mathbb{R}^2$, D mulțime deschisă.

Cunoaşterea unei asemenea reprezentări este suficientă pentru a descrie curba pe suprafață pentru că nu avem decât de efectuat o compunere cu aplicația h. Din acest motiv vom spune că (3.1) – (3.3) sunt reprezentări analitice ale curbei C pe suprafața S.

Reprezentarea analitică (3.1) duce la reprezentarea curbei C în forma

(3.1’) $$\begin{cases} x=x(u(t),v(t)), \\ y=y(u(t),v(t)), \\ z=z(u(t),v(t)),\ t\in I, \text{ sau} \end{cases}$$

(3.1'') $\vec{r}=\vec{r}\left(u(t),v(t)\right),\ t\in I$.

Formula de derivare a funcțiilor compuse ne dă

(3.4) $\dfrac{d\vec{r}}{dt}(t)=\vec{r_u}\left(u(t),v(t)\right)u'(t)+\vec{r_v}\left(u(t),v(t)\right)v'(t),\ t\in I$.

Această formulă ne arată că $\dfrac{d\vec{r}}{dt}(t)\neq\vec{0}$ pe I pentru că în caz contrar, având în vedere că derivatele u' şi v' nu sunt simultan nule, ar rezulta că $\vec{r_u}$ şi $\vec{r_v}$ sunt vectori coliniari, adică $\vec{r_u}\times\vec{r_v}=\vec{0}$ cel puțin într-un punct din U, fals.

În cazul în care arcul *c* are reprezentarea (3.2), curba *C* are ecuațiile

(3.2') $\vec{r}=\vec{r}\left(u,f(u)\right),\ u\in J$ interval deschis în $\mathbb{R}$.

Formula

(3.5) $\dfrac{d\vec{r}}{du}=\vec{r_u}+\vec{r_v}f'$,

ne arată că $\dfrac{d\vec{r}}{du}\neq\vec{0}$ pe J.

Pentru a obține o reprezentare a curbei *C* plecând de la reprezentarea (3.3), trebuie mai întâi să facem o explicitare în forma (3.2).

Fie $P_0(u_0,v_0)\in S$. Din injectivitatea aplicației h rezultă că perechea (u_0,v_0) este unic determinată încât $P_0=h(u_0,v_0)$.

Fie în U deschis în $\mathbb{R}^2$ segmentul de dreaptă de ecuație

(3.6) $v=v_0$

care se poate reprezenta parametric prin

(3.6') $\begin{cases}u=u\\ v=v_0,\ u\in J \text{ interval deschis in } \mathbb{R}.\end{cases}$

Imaginea prin h a acestui segment de dreaptă este o curbă pe S care trece prin P_0 şi care este de fapt mulțimea punctelor $P(u,v_0)$ cu $u\in J$. Ea se poate reprezenta şi în forma

(3.6'') $\vec{r}=\vec{r}(u,v_0),\ u\in J$.

Această curbă se numeşte linia parametrică $v=v_0$. Similar definim curba numită linia parametrică $u=u_0$ ca imaginea segmentului de dreaptă (deschis) din U de ecuații

(3.7) $u=u_0$,

(3.7') $\begin{cases}u=u_0,\\ v=v,\ v\in I \text{ interval deschis in } \mathbb{R}\end{cases}$

(3.7'') $\vec{r}=\vec{r}(u_0,v),\ v\in I$.

Punctul P_0 este la intersecția liniilor (curbelor) parametrice $u=u_0$ și $v=v_0$, motiv pentru care se spune că u_0 și v_0 sunt coordonate curbilinii ale punctului P_0.

A se compara cu situația unui punct *M* dintr-un plan raportat la un reper cartezian Oxy. Punctul $M(x_0,y_0)$ se găsește la intersecția dreptelor $x=x_0$ și $y=y_0$ și se spune că (x_0,y_0) sunt coordonate rectangulare.

Vectorul tangent la curba $v=v_0$ în punctul $P_0=(u_0,v_0)$ este $\frac{d\vec{r}}{du}=\vec{r}_u u'=\vec{r}_u(u_0,v_0)$ iar vectorul tangent la curba $u=u_0$ în același punct este $\vec{r}_v(u_0,v_0)$. Amintim că acești vectori sunt necoliniari pentru că $\vec{r}_u\times\vec{r}_v\neq\vec{0}$ pe U.

Dacă vom considera imaginile prin *h* ale tuturor segmentelor din U de ecuație $v=v_0$, obținem pe *S* o familie de curbe numită familia curbelor sau liniilor parametrice $v=$*constant*. Similar imaginile prin h ale segmentelor din U de ecuație $u=u_0$ constituie o familie de curbe pe *S*, numită familia curbelor sau liniilor parametrice $u=$*constant*. Prin fiecare punct P_0 al suprafeței trece câte o linie din fiecare familie de linii parametrice, care nu au alte puncte comune în afara lui P_0 pentru că *h* este aplicație injectivă și vectorii lor tangenți în P_0 sunt necoliniari. Se spune că cele două familii de linii parametrice formează o rețea pe suprafață, numită rețeaua liniilor parametrice (Fig. 22)

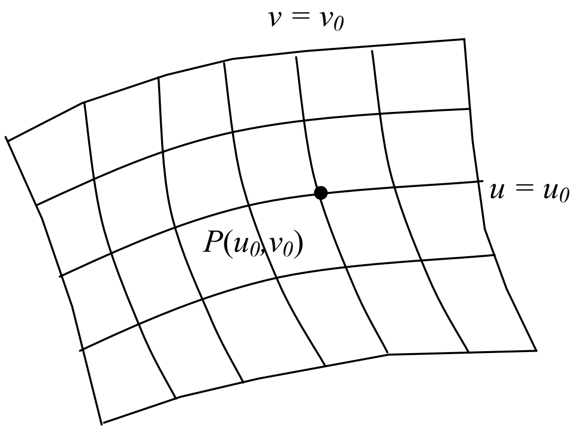

Fig. 22. Rețeaua liniilor parametrice pe S

Observație. Rețeaua liniilor parametrice se construiește plecând de la o parametrizare, deci depinde de parametrizare. Reciproc, dată o rețea de curbe pe suprafață, adică două familii de curbe pe suprafață, cu proprietatea că prin fiecare punct al suprafeței trece câte o curbă din fiecare familie, curbe care nu au alte puncte comune și au vectorii tangenți în punctul de intersecție necoliniari, se obține o parametrizare a ei.

§4. Spațiul tangent într-un punct al unei suprafețe

În Capitolul 0 am numit spațiul vectorial V^3 spațiu tangent la E^3 în O pentru motivul că aplicația $\varphi_O : E^3 \to V^3$ care asociază lui $A \in E^3$ vectorul $\overrightarrow{OA} \in V^3$ este bijecție. Am stabilit și că pentru orice punct $P \in E^3$ aplicația similară $\varphi_P : E^3 \to V^3$, $\varphi_P(A) = \overrightarrow{PA}$, $A \in E^3$, este bijecție, adică V^3 este spațiu tangent în toate punctele lui E^3.

Noțiunea de spațiu tangent este o noțiune punctuală. Pentru a sublinia acest lucru vom considera mulțimea $T_P E^3 = \left\{\left(P, \vec{v}\right), \vec{v} \in V^3\right\}$ și o vom organiza ca spațiu liniar cu operațiile

(4.1) $\left(P,\vec{v}\right)+\left(P,\vec{w}\right)=\left(P,\vec{v}+\vec{w}\right),\ a\left(P,\vec{v}\right)=\left(P,a\vec{v}\right),\ \forall a\in\mathbb{R},\ \forall\vec{v},\vec{w}\in V^3.$

Aplicația dată de $\left(P,\vec{v}\right)\to\vec{v}$ este evident un izomorfism liniar a lui $T_P E^3$ cu V^3.

Definiția 4.1. *Numim $T_P E^3$ spațiu liniar tangent la E^3 în $P \in E^3$.*

Vom da o interpretare geometrică lui $T_P E^3$ care va justifica denumirea de spațiu tangent. Fie în E^3 un reper ortonormat $\mathsf{R} = \left\{\left(O, \left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)\right)\right\}$ pozitiv orientat în raport cu care $P \in E^3$ are vectorul de poziție $\vec{r_0}$. Fie dreapta prin P de direcția vectorului $\vec{v} \in V^3$. Ecuația ei este $\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v},\ t \in \mathbb{R}$ și observăm că această dreaptă (curbă particulară) are proprietățile

i) La valoarea $t = 0$ trece prin P,

ii) Vectorul tangent ei în P este $\dfrac{d\vec{r}}{dt}(0) = \vec{v}$.

De fapt există o mulțime de curbe în E^3 cu proprietățile i) și ii). Ele au comun P și $\vec{v}$. Le vom pune într-un același "coș" pe care-l vom eticheta cu $\left(P,\vec{v}\right)$. Avem astfel o semnificație geometrică a elementului $\left(P,\vec{v}\right)$ din $T_P E^3$: el reprezintă

o mulțime de curbe care trec prin P şi au în P ca vector tangent pe $\vec{v}$. Prin reparametrizare se poate aranja ca fiecare curbă din mulțime să treacă prin P la valoarea zero a parametrului de pe curbă. Cititorul este invitat să regândească această interpretare a lui $T_P E^3$ în termeni de relație de echivalență. "Coşul" de care vorbeam este o clasă de echivalență. Evident că pentru a da clasa de echivalență este suficient să dăm un reprezentat al ei. În cazul acesta cel mai simplu este să dăm dreapta prin P de vector director $\vec{v}$.

Considerațiile de mai sus ne sugerează o metodă de a defini o noțiune de spațiu tangent într-un punct al unei mulțimi diferită de E^3. Ar trebui ca acea mulțime să conțină curbe care să admită tangente. Vom folosi această metodă la suprafețe.

Fie o suprafață $S = h(U)$ cu U mulțime deschisă în $\mathbb{R}^2$ şi $h: U \to E^3$ scufundare. Fie $P \in S$ definit de $h(u_0, v_0)$, adică (u_0, v_0) sunt coordonatele sale curbilinii. Vom nota, ca de obicei, prin $\vec{r}$ funcția vectorială asociată lui h.

Fie o curbă $\gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}^2, \varepsilon > 0$, cu $\gamma(0) = (u_0, v_0)$. Atunci $h \circ \gamma: (-\varepsilon, \varepsilon) \to S$ este o curbă pe S care trece prin P la valoarea zero a parametrului.

Definiția 4.2. *Se numeşte vector tangent la S în punctul $P \in S$, un vector din $T_P E^3$ care este tangent la o curbă prin P, situată pe S.*

Vom nota prin $T_P S$ mulțimea vectorilor tangenți la S în punctul $P \in S$.

Observație. Fiind dat un vector X din V^3 tangent la suprafața S în punctul ei P, există o infinitate de curbe prin P, situate pe S, care să aibă ca vector tangent în P, vectorul X. Ele vor fi gândite într-o clasă de echivalență definită de următoarea relație de echivalență: două curbe pe S care trec prin P sunt echivalente dacă au acelaşi vector tangent în P (Fig. 23).

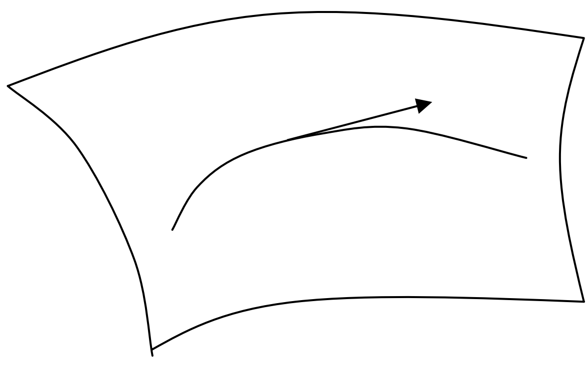

Fig. 23

Continuăm cu folosirea notațiilor deja introduse. Ecuația curbei imagine pe S a curbei γ este

(4.2) $$\vec{r} = \vec{r}\left(u(t), v(t)\right),\ u'^2(t) + v'^2(t) > 0,\ \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon).$$

Această curbă trece prin P la valoarea $t = 0$.

Vectorul tangent ei în P este

(4.3) $$\frac{d\vec{r}}{dt}(0) = \vec{r_u}(u_0, v_0)u'(0) + \vec{r_v}(u_0, v_0)v'(0).$$

Vectorul $\frac{d\vec{r}}{dt}(0)$ este tangent suprafeței S în P.

Linia parametrică $v = v_0$ trece prin P iar vectorul tangent ei în P este $\vec{r_u}(u_0, v_0)$. Deci $\vec{r_u}(u_0, v_0)$ este tangent suprafeței S în P. Similar constatăm că $\vec{r_v}(u_0, v_0)$ este tangent suprafeței S în P. Aşadar vectorii necoliniari (deci liniar independenți) $\vec{r_u}(u_0, v_0)$ şi $\vec{r_v}(u_0, v_0)$ din V^3 sunt în $T_P S$. Mai mult, formula (4.3) ne arată că orice vector din $T_P S$ este o combinație liniară de vectorii liniar independenți $\vec{r_u}(u_0, v_0)$ şi $\vec{r_v}(u_0, v_0)$. Rezultă că are loc

Propoziția 4.1. *Mulțimea $T_P S$ este un subspațiu liniar de dimensiune 2 a spațiului liniar $T_P E^3$.*

Pe baza acestei propoziției vom numi $T_P S$ spațiu liniar tangent la S în punctul $P \in S$.

Noțiunea de spațiu tangent, noțiune punctuală, este o noțiune geometrică, intrinsec asociată suprafeței *S*. Vom demonstra

Propoziția 4.2. *Spațiul liniar tangent $T_P S$ nu depinde de reperul ales în E^3 şi nici de parametrizarea suprafeței S.*

Demonstrație. Am văzut mai sus că vectorii $\vec{r_u}$ şi $\vec{r_v}$ nu depind de reperul R din E^3, deci nici $T_P S$ nu depinde de R. La o schimbare de parametrii (1.3), (1.4), au loc formulele (1.6) care ne arată că vectorii $\vec{h_{\tilde{u}}}$, $\vec{h_{\tilde{v}}}$ generează subspațiul liniar $T_P S$. ■

§5. Planul tangent într-un punct al suprafeţei. Normala la suprafaţă

Continuăm să considerăm o suprafaţă S cu reprezentarea parametrică

(5.1) $\vec{r} = \vec{r}(u,v),\ \vec{r_u} \times \vec{r_v} \neq \vec{0}$ pe mulţimea deschisă $U \subseteq \mathbb{R}^2$,

şi un punct $P(u_0, v_0)$ pe S.

Definiţia 5.1. *Subspaţiul afin din E^3 determinat de P şi spaţiul liniar T_PS se numeşte plan tangent la S în P.*

Am văzut că T_PS este generat de vectorii $\vec{r_u}(u_0,v_0)$ şi $\vec{r_v}(u_0,v_0)$.

Deci planul tangent la S în p este planul care trece prin P şi conţine aceşti vectori. Ecuaţia sa este evident

(5.2) $\left(\vec{r} - \vec{r}(u_0,v_0), \vec{r_u}(u_0,v_0), \vec{r_v}(u_0,v_0)\right) = 0$

sau cu ajutorul coordonatelor de vectori:

(5.2') $$\begin{vmatrix} x - x(u_0,v_0) & y - y(u_0,v_0) & z - z(u_0,v_0) \\ x_u(u_0,v_0) & y_u(u_0,v_0) & z_u(u_0,v_0) \\ x_v(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) & z_v(u_0,v_0) \end{vmatrix} = 0 .$$

Putem da planul tangent la S în P şi prin ecuaţia

(5.2'') $\vec{r} = \vec{r}(u_0,v_0) + \lambda \vec{r_u}(u_0,v_0) + \mu \vec{r_v}(u_0,v_0), \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Fie suprafaţa S reprezentată explicit în forma

(5.3) $z = f(x,y),\ (x,y) \in D$ mulţime deschisă în $\mathbb{R}^2$.

Pentru a găsi ecuaţia planului tangent la S în $P(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$, trecem la reprezentarea parametrică

$$x = u,\ y = v,\ z = f(u,v),\ (u,v) \in D$$

şi aplicăm (5.2). Obţinem

(5.4) $p(x - x_0) + q(y - y_0) - (z - z_0) = 0,\ p = \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), q = \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.

În cazul în care suprafaţa S este reprezentată implicit prin

(5.5) $F(x,y,z) = 0,\ F_x^2 + F_y^2 + F_z^2 > 0,\ (x,y,z) \in V$

mulţime deschisă în $\mathbb{R}^3$, pentru a obţine ecuaţia planului tangent la S în $P(x_0,y_0,z_0) \in S$ se face o explicitare, de exemplu în forma $z = f(x,y)$ dacă $F_z(x_0,y_0,z_0) \neq 0$ cu $z_0 = f(x_0,y_0)$ şi $F(x,y,f(x,y)) \equiv 0$ pe o submulţime deschisă ce conţine punctul (x_0,y_0,z_0). Prin derivarea acestei identităţi în raport cu x şi y se obţin identităţile

$$F_x + F_z \frac{\partial f}{\partial x} \equiv 0,\ F_y + F_z \frac{\partial f}{\partial y} \equiv 0$$

din care deducem

$$p=-\frac{F_x(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)},\ q=-\frac{F_y(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}.$$

Prin înlocuire în (5.4) obținem ecuația planului tangent la *S,* dată prin (5.5), în $P(x_0,y_0,z_0)\in S$ în forma

(5.6) $(x-x_0)F_x(x_0,y_0,z_0)+(y-y_0)F_y(x_0,y_0,z_0)+(z-z_0)F_z(x_0,y_0,z_0)=0$.

Ecuația (5.6) se scrie compact în forma

(5.6') $\quad \left\langle \vec{r}-\vec{r}(u_0,v_0),\ \text{grad}_0 F \right\rangle = 0$,

unde indicele 0 arată că vectorul grad F se calculează în punctul (x_0,y_0,z_0).

Definiția 5.1. *Dreapta perpendiculară pe planul tangent la* S *în punctul* $P\in S$ *care trece prin* P *se numeşte normala la suprafață în punctul* P.

Vectorul care dă direcția normalei în $P(u_0,v_0)$ este vectorul $\vec{r_u}\times\vec{r_v}$ calculat în (u_0,v_0). Ecuația normalei la S în punctul P este

(5.7) $\quad \vec{r}=\vec{r}(u_0,v_0)+\lambda\vec{r_u}(u_0,v_0)\times\vec{r_v}(u_0,v_0),\ \lambda\in\mathbb{R}$.

Versorul $\vec{N}(u_0,v_0)=\left.\frac{\vec{r_u}\times\vec{r_v}}{\left\|\vec{r_u}\times\vec{r_v}\right\|}\right|_P$ se numeşte versorul normalei la S în punctul P. Vectorii $\left(\vec{r_u}(u_0,v_0),\vec{r_v}(u_0,v_0),\vec{N}(u_0,v_0)\right)$ sunt liniari independenți, adică formează o bază în T_PE^3. Ansamblul $\left\{P,\left(\vec{r_u}(u_0,v_0),\vec{r_v}(u_0,v_0),\vec{N}(u_0,v_0)\right)\right\}$ este un reper în E^3 cu originea în $P\in S$, numit reperul lui Gauss. Reperul lui Gauss se modifică atunci când punctul P variază pe S. Cu alte cuvinte, el este un reper mobil pe S.

§6. Forma I-a fundamentală a unei suprafețe

Fie din nou suprafața S reprezentată parametric prin (5.1). Începând cu acest paragraf, vom renota parametrii pe S astfel: $u=u^1,\ v=u^2$ şi vom pune $\vec{r_u}=\vec{r_{u^1}}=\vec{h_1},\ \vec{r_v}=\vec{r_{v^1}}=\vec{h_2}$.

Cu $P\in S$, vom nota prin $X_P,Y_P...$ vectori din T_PS. Rezultă că vectorul $X_P\in T_PS$ este de forma

(6.1) $\quad X_P=X^1\vec{h_1}+X^2\vec{h_2}=\sum_{i=1}^{2}X^i\vec{h_i},\ X^1,X^2\in\mathbb{R}$,

pentru că vectorii $\overrightarrow{h_1}$ şi $\overrightarrow{h_2}$ formează o bază în T_PS.

Vectorii tangenţi la S în $P\in S$ au caracter geometric pentru că au fost definiţi ca vectori tangenţi la curbe pe S care trec prin P. Amintim că factorii X^1 şi X^2 din (6.1) sunt în fond

$$X^1=\frac{du^1}{dt}(0),\ X^2=\frac{du^2}{dt}(0), \tag{6.2}$$

unde

$$\begin{cases} u^1=u^1(t) \\ u^2=u^2(t), \end{cases} \left(\frac{du^1}{dt}\right)^2+\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2>0,\ \forall t\in(-\varepsilon,\varepsilon), \tag{6.3}$$

reprezintă o curbă pe S care trece prin P la $t=0$.

Schimbarea reperului ortonormat din E^3 nu modifică nici X^1,X^2 şi nici vectorii $\overrightarrow{h_1},\overrightarrow{h_2}$.

Schimbarea parametrilor pe suprafaţă modifică atât numerele X^1,X^2 cât şi vectorii $\overrightarrow{h_1},\overrightarrow{h_2}$ dar, după cum vom verifica imediat, X_P rămâne acelaşi.

Fie schimbarea de parametrii

$$\begin{cases} u^1=u^1\left(\tilde{u}^1,\tilde{u}^2\right) \\ u^2=u^2\left(\tilde{u}^1,\tilde{u}^2\right),\ \left(\tilde{u}^1,\tilde{u}^2\right)\in\widetilde{U} \text{ multime deschisa in } \mathbb{R}^2 \end{cases} \tag{6.4}$$

cu condiţia

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial u^1}{\partial\tilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^1}{\partial\tilde{u}^{12}} \\ \dfrac{\partial u^2}{\partial\tilde{u}^1} & \dfrac{\partial u^2}{\partial\tilde{u}^2} \end{vmatrix}\neq 0 \text{ pe } \widetilde{U}. \tag{6.4'}$$

Sistemul (6.4) în necunoscutele $\tilde{u}^1,\tilde{u}^2$ se poate rezolva în forma

$$\begin{cases} \tilde{u}^1=\tilde{u}^1\left(u^1,u^2\right) \\ \tilde{u}^2=\tilde{u}^2\left(u^1,u^2\right),\ \left(u^1,u^2\right)\in U \end{cases} \tag{6.5}$$

În parametrizaţia dată de $\tilde{u}^1$ si $\tilde{u}^2$, curba (6.3) are ecuaţiile

$$\begin{cases} \tilde{u}^1=\tilde{u}^1\left(u^1(t),u^2(t)\right) \\ \tilde{u}^2=\tilde{u}^2\left(u^1(t),u^2(t)\right),\ t\in(-\varepsilon,\varepsilon). \end{cases} \tag{6.6}$$

Prin derivare în raport cu *t* a funcţiilor din (6.6), obţinem

$$\widetilde{X}^1 := \frac{d\tilde{u}^1}{dt}(0) = \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1}\frac{du^1}{dt}(0) + \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2}\frac{du^2}{dt}(0)$$

$$\widetilde{X}^2 := \frac{d\tilde{u}^2}{dt}(0) = \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1}\frac{du^1}{dt}(0) + \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2}\frac{du^2}{dt}(0),$$

unde derivatele parțiale $\frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2}$, … sunt calculate în $\left(u^1(0), u^2(0)\right)$, coordonatele curbilinii ale lui $P \in S$.

Aceste formule se pot scrie mai compact astfel:

(6.7) $$\widetilde{X}^i = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^j} X^j,\ i = 1,2.$$

Pe de altă parte, în noile notații, formula (1.6) se scrie în forma

(6.8) $$\vec{\tilde{h}}_i = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^i} \vec{h}_j,$$

unde $\vec{\tilde{h}} = \vec{h}\left(u^1\left(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2\right), u^2\left(\tilde{u}^1, \tilde{u}^2\right)\right)$. Ne propunem să arătăm că

(6.9) $$\sum_{i=1}^{2} \widetilde{X}^i \vec{\tilde{h}}_i = \sum_{j=1}^{2} X^j \vec{h}_j .$$

Avem: $\sum_{i=1}^{2} \widetilde{X}^i \vec{\tilde{h}}_i = \sum_{i,j,k=1}^{2} \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^k}\frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^i} X^k \vec{h}_j = \sum_{i,j,k=1}^{2} \delta_k^j X^k \vec{h}_j = \sum X^j \vec{h}_j$, unde am folosit relațiile

(6.10) $$\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^k}\frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^i} = \delta_k^j = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & j \neq k. \end{cases}$$

Rămâne să ne convingem că are loc (6.10).

Ştim că ecuațiile (6.5) au fost obținute rezolvând sistemul (6.4). Aşadar au loc identitățile

$$u^j \equiv u^j\left(\tilde{u}^1\left(u^1, u^2\right), \tilde{u}^2\left(u^1, u^2\right)\right)\ j = 1,2.$$

Prin derivare compusă în raport cu u^k, $k = 1,2$, obținem:

$$\frac{\partial u^j}{\partial u^k} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial u^j}{\partial \tilde{u}^i}\frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^k},\ j,k = 1,2 .$$

Dar $\frac{\partial u^j}{\partial u^k} = \delta_k^j$.

Formula (6.9) ne arată că $X_P \in T_P S$ nu depinde de parametrizarea de pe suprafața *S*.

Definiția 6.1. *Aplicația* $g_P : T_P S \times T_P S \to \mathbb{R}$ *care asociază perechii* (X_P, Y_P) *numărul real* $g_P(X_P, Y_P) = \langle X_P, Y_P \rangle$, *unde* $\langle\ ,\ \rangle$ *înseamnă produsul scalar în* V^3, *se numeşte forma I-a fundamentală a suprafeței S în P. Aplicația* $P \to g_P$ *se numeşte forma I-a fundamentală a suprafeței S.*

Observație. Forma I-a fundamentală are caracter geometric pentru că X_P, Y_P sunt vectori tangenți şi produsul scalar a doi vectori nu depinde de reperul din spațiu.

Aplicația g_P este evident biliniară, simetrică şi pozitiv definită $\left(g_P(X_P, Y_P) > 0\ \forall X_P \neq 0 \in T_P S\right)$.

Fie X_P dat de (6.1) şi $Y_P = Y^1 \overrightarrow{h_1} + Y^2 \overrightarrow{h_2}$. Biliniaritatea şi simetria aplicației g_P conduc la formula

(6.11) $\qquad g_P(X_P, Y_P) = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} X^i Y^j$, unde

(6.11') $\qquad g_{ij}(P) = \left\langle \overrightarrow{h_i}, \overrightarrow{h_j} \right\rangle$, produs scalar calculat în $P\left(u_0^1, u_0^2\right)$.

Funcțiile g_{ij} care depind de *P*, iar prin intermediul coordonatelor curbilinii apar definite pe *U*, se numesc *coeficienții formei I-a fundamentale*.

Să efectuăm o schimbare de parametrii de forma (6.4) cu (6.4') pe *S*. Fie $\widetilde{g_{ij}}(P) = \left\langle \overrightarrow{\widetilde{h}_i}, \overrightarrow{\widetilde{h}_j} \right\rangle$ noii coeficienți ai formei I-a fundamentale. Cu ajutorul formulei (6.8), aceştia devin $\widetilde{g_{ij}}(P) = \left\langle \sum_{r=1}^{2} \frac{\partial u^r}{\partial \tilde{u}^i} \overrightarrow{h_r}, \sum_{s=1}^{2} \frac{\partial u^s}{\partial \tilde{u}^j} \overrightarrow{h_s} \right\rangle$. Prin folosirea proprietăților produsului scalar obținem

(6.12) $\qquad \widetilde{g_{ij}}(P) = \sum_{r,s=1}^{2} \frac{\partial u^r}{\partial \tilde{u}^i} \frac{\partial u^s}{\partial \tilde{u}^j} g_{rs}(P).$

În aceste egalități *P* are în stânga coordonatele curbilinii $\left(\tilde{u}_0^1, \tilde{u}_0^2\right)$ iar în dreapta are coordonatele curbilinii $\left(u^1\left(\tilde{u}_0^1, \tilde{u}_0^2\right), u^2\left(\tilde{u}_0^1, \tilde{u}_0^2\right)\right)$ şi derivatele parțiale sunt calculate în $\left(\tilde{u}_0^1, \tilde{u}_0^2\right)$.

Având în vedere (6.10), ecuațiile (6.12) se pot rezolva în raport cu g_{rs} şi se obțin formulele

(6.12') $\qquad g_{rs}(P) = \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^r} \frac{\partial \tilde{u}^j}{\partial u^s} \widetilde{g_{ij}}(P).$

Formulele (6.12) şi (6.12') constituie legea de transformare a coeficienților formei I-a fundamentale la o schimbare de parametrii pe suprafață.

Coeficienții formei I-a fundamentale sunt în număr de trei:

(6.13) $$g_{11} = \left\langle \overrightarrow{h_1}, \overrightarrow{h_1} \right\rangle,\ g_{12} = g_{21} = \left\langle \overrightarrow{h_1}, \overrightarrow{h_2} \right\rangle,\ g_{22} = \left\langle \overrightarrow{h_2}, \overrightarrow{h_2} \right\rangle$$

sau în notații clasice

(6.14) $$g_{11} := E = \overrightarrow{r_u}^2,\ g_{12} := F = \left\langle \overrightarrow{r_u}, \overrightarrow{r_v} \right\rangle,\ g_{22} := G = \overrightarrow{r_v}^2 .$$

Forma pătratică asociată formei I-a fundamentale se numeşte, de obicei, tot forma I-a fundamentală şi se notează tot prin g_P. Avem

(6.15) $$g_P(X_P) = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} X^i X^j = g_{11}\left(X^1\right)^2 + 2g_{12}X^1X^2 + g_{22}\left(X^2\right)^2,$$

pentru vectorul tangent X_P dat de (6.1).

Notăm prin $G = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$ matricea formei pătratice g_P. Definiția lui g_P ne spune că $\Delta = \det G = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ este o funcție pozitivă pe U. Acest fapt rezultă şi astfel:

(6.16) $$\Delta = \overrightarrow{h_1}^2 \overrightarrow{h_2}^2 - \left\langle \overrightarrow{h_1}, \overrightarrow{h_2} \right\rangle^2 = \left| \overrightarrow{h_1} \times \overrightarrow{h_2} \right|^2 > 0 \text{ pe } U.$$

Să ne amintim că vectorul X_P are coordonatele de forma (6.2). Direcția sa este de forma $\left\{ \lambda \left(\frac{du^1}{dt}(0), \frac{du^2}{dt}(0) \right), \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}$. Cu λ particular de forma $\lambda = dt$, constatăm că direcția lui X_P este complet determinată de diferențialele $\left(du^1, du^2\right)$. Vom spune că $du = \left(du^1, du^2\right)$ reprezintă o direcție tangentă suprafeței. Pentru o asemenea direcție definim forma pătratică pozitiv definită

(6.17) $$\phi(P, du) = g_{11}\left(du^1\right)^2 + 2g_{12}du^1du^2 + g_{22}\left(du^2\right)^2,$$

unde coeficienții sunt calculați în $P\left(u^1, u^2\right)$, numită, de asemenea, forma I-a fundamentală a suprafeței *S*. În notații clasice

(6.17') $$\phi(P, du, dv) = E(u,v)du^2 + 2F(u,v)dudv + G(u,v)dv^2 .$$

În cazul în care suprafața este dată în forma explicită $z = f(x,y), (x,y) \in D$, mulțime deschisă în $\mathbb{R}^2$, punem $x = u, y = v$ şi trecem la reprezentarea parametrică $\vec{r}(u,v) = (u, v, f(u,v))$ şi rezultă $\overrightarrow{r_u} = (1, 0, p)$, $\overrightarrow{r_v} = (1, 0, q)$, unde $p = f_x, q = f_y$, în notațiile lui Ch. Monge. Aşadar avem

(6.18) $$E = 1 + p^2, F = pq, G = 1 + q^2, \Delta = 1 + p^2 + q^2 .$$

Fie suprafața S dată implicit de ecuația $F(x,y,z)=0, F_x^2+F_y^2+F_z^2>0$ pe V, mulțime deschisă în $\mathbb{R}^3$. Cu $F_z \neq 0$ pe o submulțime deschisă $V_0 \subset V$, putem explicita $z=f(x,y)$ şi are loc identitatea $F(x,y,f(x,y)) \equiv 0$ pe o submulțime deschisă D din $\mathbb{R}^2$. Prin derivare în raport cu x şi y, obținem identitățile $F_x+F_z \cdot p \equiv 0, F_y+F_z \cdot q \equiv 0$, din care rezultă $p=-\frac{F_x}{F_z}, q=-\frac{F_y}{F_z}$. Aplicăm (6.18) şi obținem

$$(6.19) \qquad E=1+\frac{F_x^2}{F_z^2}, F=\frac{F_xF_y}{F_z^2}, G=1+\frac{F_y^2}{F_z^2}, \Delta=1+\frac{F_x^2+F_y^2}{F_z^2}.$$

§7. Aplicații ale formei I-a fundamentale

Fie o suprafață $S=h(U)$ cu U mulțime deschisă în $\mathbb{R}^2$, un punct $P \in S$ şi T_PS spațiul tangent în P la S.

După definiția 6.1 perechea (T_PS, g_P) este un spațiu vectorial euclidian (de dimensiune 2). Aşadar putem vorbi de lungimea unui vector $X_P \in T_PS$:

$$(7.1) \qquad \|X_P\|=\sqrt{g_P(X_P,X_P)}=\sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(P)X^iX^j},$$

precum şi de unghiul a doi vectori $X_P, Y_P \in T_PS$:

$$(7.2) \quad \cos\sphericalangle(X_P,Y_P)=\frac{g_P(X_P,Y_P)}{\|X_P\|\|Y_P\|}=\frac{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(P)X^iY^j}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(P)X^iX^j}\sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}(P)Y^iY^j}}$$

Fie o curbă pe suprafața S de ecuație

$$(7.3) \qquad \vec{r}=\vec{h}\left(u^1(t),u^2(t)\right), \quad t \in [a,b].$$

Vectorul tangent ei $\frac{d\vec{r}}{dt}$ are în baza $\left(\vec{h_1},\vec{h_2}\right)$ din T_PS coordonatele $\left(\frac{du^1}{dt},\frac{du^2}{dt}\right)$ şi deci $\left\|\frac{d\vec{r}}{dt}\right\|=\sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\left(u^1(t),u^2(t)\right)\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}}$. Rezultă că lungimea acestei curbe este

$$(7.4) \qquad L=\int_a^b \sqrt{g_{11}\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2+2g_{12}\frac{du^1}{dt}\frac{du^2}{dt}+g_{22}\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2}\,dt,$$

unde coeficienții (g_{ij}) sunt calculați în punctul $(u^1(t),u^2(t))$.

Funcția lungime de arc este în acest caz

$$s(t)=\int_a^t \sqrt{g_{11}\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2+2g_{12}\frac{du^1}{dt}\frac{du^2}{dt}+g_{22}\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2}\,d\tau,$$

iar diferențiala ei la pătrat este

$$(7.5) \qquad ds^2=\phi(P,du)=g_{11}\left(du^1\right)^2+2g_{12}du^1du^2+g_{22}\left(du^2\right)^2.$$

Aşadar, forma I-a fundamentală apare şi ca pătratul diferențialei funcției lungime de arc. Aceasta este o interpretare geometrică a formei I-a fundamentale.

Fie două curbe pe S care trec prin punctul $P\left(u_0^1,v_0^2\right)$ la valoarea t_0 a parametrului, de ecuații

$$(7.6) \qquad \begin{aligned} &\vec{r}=\vec{h}\left(u^1(t),u^2(t)\right),\\ &\vec{r}=\vec{h}'\left(u'^1(t),u'^2(t)\right),\ t\in\left(t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon\right),\varepsilon>0. \end{aligned}$$

Prin definiție, unghiul curbelor (7.6) în punctul lor de intersecție P, este unghiul vectorilor tangenți celor două curbe în punctul P. Aceşti vectori au componentele $\left(\frac{du^1}{dt}(t_0),\frac{du^2}{dt}(t_0)\right)$ şi respectiv $\left(\frac{du'^1}{dt}(t_0),\frac{du'^2}{dt}(t_0)\right)$.

După (7.2), unghiul lor θ este dat de formula

$$(7.7) \qquad \cos\theta=\frac{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du'^j}{dt}}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}}\sqrt{\sum_{i,j=1}^{2} g_{ij}\frac{du'^i}{dt}\frac{du'^j}{dt}}}.$$

După o simplificare prin $(dt)^2$, obținem formula care dă unghiul a două direcții pe S în $P\left(u_0^1,u_0^2\right)$.

Ca aplicație, să calculăm unghiul φ al curbelor $u^1=const$ şi $u^2=const$. Avem $du^1=0$ şi du^2 oarecare, respectiv du'^1 oarecare şi $du'^2=0$. Formula (7.7) ne dă

$$(7.8) \qquad \cos\varphi=\frac{g_{12}du^2du'^1}{\sqrt{g_{22}\left(du^2\right)^2}\sqrt{g_{11}\left(du'^1\right)^2}}=\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}=\frac{F}{\sqrt{EG}}.$$

Doi vectori tangenți în $P \in S$ sunt ortogonali dacă unghiul lor are măsura $\frac{\pi}{2}$. Două direcții tangente în $P \in S$ sunt ortogonale dacă unghiul lor are măsura $\frac{\pi}{2}$. Două curbe prin $P \in S$, situate pe S sunt ortogonale dacă unghiul vectorilor tangenți lor în *P* are măsura $\frac{\pi}{2}$.

Formula (7.8) ne arată că liniile parametrice sunt ortogonale dacă şi numai dacă $g_{12} = 0, (F = 0)$ pe U.

Fie *D* o submulțime compactă în *U* şi $h(D) = \mathsf{D} \subset S$ imaginea sa în *S*. Notăm prin *A* aria mulțimii D.

În unele manuale de Analiză matematică se demonstrează riguros următoarea formulă de calcul a ariei *A*:

$$A = \iint_D \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, du^1 du^2, \tag{7.9}$$

sau, în notații clasice,

$$A = \iint_D \sqrt{EG - F^2}\, du dv = \iint_D \sqrt{\Delta}\, du dv. \tag{7.9'}$$

Formula (7.9) poate fi intuită prin următoarele considerații. Fie pe *S* rețeaua liniilor parametrice. Aceasta împarte mulțimea D în patrulatere curbilinii ca în Fig. 24.

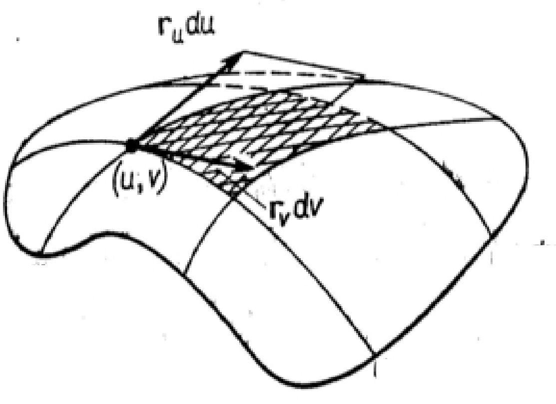

Fig. 24

Aproximăm aria unui asemenea patrulater cu aria paralelogramului determinat de vectorii $\vec{r_u} du$ şi $\vec{r_v} dv$, adică cu numărul

$$dA = \left\|\vec{r_u} \times \vec{r_v}\right\| dudv = \sqrt{\Delta} dudv.$$

Aria A va fi “suma” ariilor acestor paralelograme “infinitesimale”, sumă care este dată de $\iint\limits_D \sqrt{\Delta} dudv$.

§8. Formulele lui Gauss. Formulele lui Weingarten.

Fie suprafața S reprezentată parametric prin

(8.1) $\vec{r} = \vec{h}\left(u^1, u^2\right),\ \vec{h_1} \times \vec{h_2} \neq \vec{0}\ \forall \left(u^1, u^2\right) \in D$ mulțime deschisă în $\mathbb{R}^2$.

Fie $P \in S$. Reperul $\left\{P, \left(\vec{h_1}, \vec{h_2}, \vec{N}\right)\right\}$, unde $\vec{N} = \dfrac{\vec{h_1} \times \vec{h_2}}{\left|\vec{h_1} \times \vec{h_2}\right|}$, cu P variabil, este un *reper mobil* pe S, numit *reperul lui Gauss.* Pentru a studia variația acestui reper vom exprima vectorii $\dfrac{\partial \vec{h_1}}{\partial u^1}, \dfrac{\partial \vec{h_1}}{\partial u^2}, \dfrac{\partial \vec{h_2}}{\partial u^1}, \dfrac{\partial \vec{h_2}}{\partial u^2}$ în reperul lui Gauss şi vom obține formulele lui Gauss. Exprimarea vectorilor $\dfrac{\partial \vec{N}}{\partial u^1}$ şi $\dfrac{\partial \vec{N}}{\partial u^2}$ în reperul lui Gauss va conduce la formulele lui Weingarten. Ne ocupăm, pe rând, de stabilirea acestor formule. Notăm $\vec{h_{ij}} := \dfrac{\partial \vec{h_i}}{\partial u^j} = \dfrac{\partial^2 \vec{r}}{\partial u^j \partial u^i} = \vec{h_{ji}}$ $\left(i, j = 1, 2\right)$ şi descompunem aceşti vectori în baza $\left(\vec{h_1}, \vec{h_2}, \vec{N}\right)$ în forma următoare

$$\text{(FG)} \qquad \vec{h_{ij}} = \sum_{k=1}^{2} \Gamma_{ij}^k \vec{h_k} + b_{ij} \vec{N},\ i, j = 1, 2,$$

unde funcțiile Γ_{ij}^k şi b_{ij} de $\left(u^1, u^2\right)$ urmează a fi determinate.

Prin înmulțire scalară cu $\vec{N}$ în (FG), având în vedere că $\left\langle \vec{N}, \vec{h_k} \right\rangle = 0,\ k = 1, 2$ şi $\vec{N}^2 = 1$, obținem

$$\text{(8.2)} \qquad b_{ij} = \left\langle \vec{h_{ij}}, \vec{N} \right\rangle = \frac{1}{\left\|\vec{h_1} \times \vec{h_2}\right\|} \left(\vec{h_1}, \vec{h_2}, \vec{h_{ij}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \left(\vec{h_1}, \vec{h_2}, \vec{h_{ij}}\right),$$

unde $\Delta = \vec{h_1}^2 \cdot \vec{h_1}^2 - \left\langle \vec{h_1}, \vec{h_2} \right\rangle^2$.

În notațiile lui Gauss: $b_{11} := L,\ b_{12} = b_{21} := M,\ b_{22} := N$, dacă revenim la parametrizarea $\left(u, v\right)$, vom scrie

(8.2’) $$L=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(\overrightarrow{r_u},\overrightarrow{r_v},\overrightarrow{r_{uu}}\right), M=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(\overrightarrow{r_u},\overrightarrow{r_v},\overrightarrow{r_{uv}}\right), N=\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(\overrightarrow{r_u},\overrightarrow{r_v},\overrightarrow{r_{vv}}\right).$$

Vom determina acum funcțiile Γ_{ij}^k.

Înmulțim scalar în (FG) cu $\overrightarrow{h_m}$, $m=1,2$. Obținem

$$\left\langle\overrightarrow{h_{ij}},\overrightarrow{h_m}\right\rangle=\sum_k\Gamma_{ij}^k\left\langle\overrightarrow{h_k},\overrightarrow{h_m}\right\rangle=\sum_k\Gamma_{ij}^k g_{km}.$$

Cu i,j fixați, sistemul

(8.3) $$\sum_k g_{km}\Gamma_{ij}^k=\left\langle\overrightarrow{h_m},\overrightarrow{h_{ij}}\right\rangle,$$

în necunoscutele Γ_{ij}^1 și Γ_{ij}^2 are soluție unică pentru că $\det\left(g_{mk}\right)=\det\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{21} & g_{22}\end{pmatrix}=\Delta\neq 0$. Așadar putem obține pe rând $\left(\Gamma_{11}^1,\Gamma_{11}^2\right),\left(\Gamma_{12}^1,\Gamma_{12}^2\right)$ și $\left(\Gamma_{22}^1,\Gamma_{22}^2\right)$ rezolvând trei sisteme de tipul (8.3), funcție de $\left(g_{mk}\right)$ și $\left\langle\overrightarrow{h_m},\overrightarrow{h_{ij}}\right\rangle$.

Există un procedeu, pe care-l descriem acum, de a determina simultan toate cele 6 funcții Γ_{ij}^k.

Prin derivarea relației $g_{ik}=\left\langle\overrightarrow{h_i},\overrightarrow{h_k}\right\rangle$ în raport cu u^j obținem

(i) $$\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j}=\left\langle\overrightarrow{h_{ij}},\overrightarrow{h_k}\right\rangle+\left\langle\overrightarrow{h_i},\overrightarrow{h_{kj}}\right\rangle,\ i,j,k=1,2.$$

Permutăm ciclic i,j,k în (i) și obținem

(ii) $$\frac{\partial g_{ji}}{\partial u^k}=\left\langle\overrightarrow{h_{jk}},\overrightarrow{h_i}\right\rangle+\left\langle\overrightarrow{h_j},\overrightarrow{h_{ik}}\right\rangle,$$

(iii) $$\frac{\partial g_{kj}}{\partial u^i}=\left\langle\overrightarrow{h_{ki}},\overrightarrow{h_j}\right\rangle+\left\langle\overrightarrow{h_k},\overrightarrow{h_{ji}}\right\rangle.$$

Înmulțim una din ecuațiile (i), (ii), (iii) cu -1, fie de exemplu (iii), și le adunăm membru cu membru. Obținem

(8.4) $$\left\langle\overrightarrow{h_i},\overrightarrow{h_{jk}}\right\rangle=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^j}+\frac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial u^i}\right):=[jk;i].$$

Funcțiile notate prin $[jk;i]$ se numesc simbolii Christoffel de specia I-a. Observăm simetria lor în indicii j,k. Sistemul (8.3) devine

(8.3’) $$\sum_k g_{mk}\Gamma_{ij}^k=[ij;m].$$

Fie $\left(g^{mn}\right)$ matricea inversă matricii $\left(g_{ni}\right)$, adică avem

$$\sum_{n=1}^{2} g^{mn} g_{ni} = \delta_i^m = \begin{cases} 1 \text{ pentru } i = m \\ 0 \text{ pentru } i \neq m. \end{cases}$$

Înmulțim în (8.3') cu g^{nm} şi sumăm după m. Rezultă $\sum_{k,m=1}^{2} g^{nm} g_{mk} \Gamma_{ij}^k = \sum_{m=1}^{2} g^{nm} [ij;m]$ sau $\Gamma_{ij}^n = \sum_{m=1}^{2} g^{nm} [ij;m]$.

Aşadar am obținut

$$(8.5) \qquad \Gamma_{ij}^n = \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{2} g^{nm} \left(\frac{\partial g_{mi}}{\partial u^j} + \frac{\partial g_{mj}}{\partial u^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^m} \right), \ i, j, n, m = 1,2 .$$

Funcțiile Γ_{ij}^n date de (8.5) se numesc simbolii lui Christoffel de specia a II-a.

Formulele (8.5) justifică

Propoziția 8.1. *Funcțiile* Γ_{ij}^k *se exprimă numai cu funcțiile* (g_{ij}) *şi derivatele lor de ordinul I.*

Formulele (FG) cu funcțiile (Γ_{ij}^k) date de (8.5) şi funcțiile (b_{ij}) date de (8.2) se numesc *formulele lui Gauss*.

Stabilim acum formulele lui Weingarten. Notăm $\overrightarrow{N_i} := \frac{\partial \overrightarrow{N}}{\partial u^i}$ i = 1,2 şi descompunem aceşti vectori în baza $(\overrightarrow{h_1}, \overrightarrow{h_2}, \overrightarrow{N})$ astfel:

$$(8.6) \qquad \overrightarrow{N_i} = -\sum_{j=1}^{2} A_i^j \overrightarrow{h_j} + \alpha \overrightarrow{N}, \ i = 1,2 ,$$

unde funcțiile A_i^j şi α de variabilele (u^1, u^2) urmează a fi determinate.

Înmulțim scalar (8.6) cu $\overrightarrow{N}$ şi avem în vedere că $\overrightarrow{N}^2 = 1$, $\langle \overrightarrow{N_i}, \overrightarrow{N} \rangle = 0$ şi $\langle \overrightarrow{N}, \overrightarrow{h_j} \rangle = 0$. Obținem $\alpha = 0$.

Înmulțim scalar (8.6) cu $\overrightarrow{h_k}$ $(k = 1,2)$ şi rezultă $-\sum_{j=1}^{2} A_i^j g_{jk} = \langle \overrightarrow{N_i}, \overrightarrow{h_k} \rangle$. Prin derivarea egalității $\langle \overrightarrow{h_k}, \overrightarrow{N} \rangle = 0$ în raport cu (u^i), obținem $\langle \overrightarrow{N_i}, \overrightarrow{h_k} \rangle = -\langle \overrightarrow{h_{ik}}, \overrightarrow{N} \rangle = -b_{ik}$ şi deci

$$(8.7) \qquad \sum_{j=1}^{2} g_{kj} A_i^j = b_{ki}, \ i, k = 1,2 .$$

În (8.7) avem 4 ecuații care, grupate convenabil câte două, formează două sisteme liniare, fiecare cu matricea (g_{kj}) care este nesingulară şi deci cele patru

funcții $\left(A_i^j\right)$ sunt unic determinate. Pentru a găsi unitar expresia acestor funcții, înmulțim în (8.7) cu g^{hk} şi sumăm după *k*. Rezultă: $\sum_{k,j=1}^{2} g^{hk} g_{kj} A_i^j = \sum_k g^{hk} b_{ki}$ sau, având în vedere că $\sum_k g^{hk} g_{kj} = \delta_j^h$,

(8.8) $$A_i^h = \sum_{k=1}^{2} g^{hk} b_{ki}.$$

Formulele

(FW) $$\overrightarrow{N_i} = -\sum_{j=1}^{2} A_i^j \overrightarrow{h_j},$$

cu funcțiile $\left(A_i^j\right)$ date de (8.8) se numesc *formulele lui Weingarten*.

Definim operatorul liniar Weingarten $A : T_P S \to T_P S$ prin $A\overrightarrow{h_i} = \sum_{j=1}^{2} A_i^j \overrightarrow{h_j}$, cu alte cuvinte $\left(A_i^j\right)$ este matricea operatorului *A* în baza $\left(\overrightarrow{h_1}, \overrightarrow{h_2}\right)$.

Propoziția 8.2. *Operatorul Weingarten A este autoadjunct în raport cu g, adică are loc egalitatea*

(8.9) $$g(AX, Y) = g(X, AY),\ X, Y \in T_P S.$$

Demonstrație. Este suficient să verificăm (8.9) pentru $X = \overrightarrow{h_i}$ şi $Y = \overrightarrow{h_j}$. Avem, în baza egalităților (8.8), $g\left(A\overrightarrow{h_i}, \overrightarrow{h_j}\right) = g\left(\sum_{k=1}^{2} A_i^k h_k, \overrightarrow{h_j}\right) = \sum_{k=1}^{2} A_i^k g_{kj} = b_{ij}$. Pe de altă parte, $g\left(\overrightarrow{h_i}, A\overrightarrow{h_j}\right) = g\left(\overrightarrow{h_i}, \sum_{k=1}^{2} A_j^k \overrightarrow{h_k}\right) = \sum_{k=1}^{2} A_j^k g_{ki} = b_{ji}$ în baza aceloraşi egalități (8.8). Cum $b_{ij} = b_{ji}$, (8.9) are loc.

§9. Forma a II-a fundamentală a unei suprafețe

Continuăm să studiem suprafața *S* reprezentată parametric, utilizând rezultatele stabilite mai sus.

Definiția 9.1. *Aplicația* $b_P : T_P S \times T_P S \to \mathbb{R}$ *dată prin formula*

(9.1) $$b_P(X, Y) = g_P(AX, Y), \forall X, Y \in T_P S,$$

se numeşte ***forma a II-a fundamentală*** *a suprafeței S în punctul P. Aplicația* $P \to b_P$ *se numeşte forma a II-a fundamentală a suprafeței S..*

Aplicația b_P este o formă biliniară pentru că A este operator liniar şi g_P este formă biliniară. Pe baza egalității (8.9), forma biliniară b_P este simetrică. Matricea ei în baza $\left(\overrightarrow{h_1},\overrightarrow{h_2}\right)$ este $b_P\left(\overrightarrow{h_i},\overrightarrow{h_j}\right)=g_P\left(A\overrightarrow{h_i},\overrightarrow{h_j}\right)=b_{ij}$, după cum rezultă în demonstrația Propoziției 8.2. Aşadar putem scrie b_P şi în forma următoare

(9.2) $$b_P\left(X,Y\right)=\sum_{i,j=1}^{2}b_{ij}X^iY^j\text{, pentru } X=\sum_{i=1}^{2}X^i\overrightarrow{h_i},\ Y=\sum_{i=1}^{2}Y^j\overrightarrow{h_j}.$$

Observație. Aplicația b_P are caracter geometric. Matricea formei biliniare b_P are determinantul $\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{vmatrix}=b_{11}b_{22}-b_{12}^2$.

Definiția 9.2. *Punctele suprafeței S în care avem* $b_{11}b_{22}-b_{12}^2<0\left(\text{respectiv }=0,>0\right)$ *se numesc* ***puncte hiperbolice*** *(respectiv* ***parabolice, eliptice****)*.

Forma pătratică asociată lui b_P, adică

(9.3) $$b_P\left(X\right)=\sum_{i,j=1}^{2}b_{ij}X^iX^j,\ X=\sum_{i=1}^{2}X^i\overrightarrow{h_i},$$

se numeşte, de asemenea, forma a II-a fundamentală a suprafeței *S*.

Fie $du=\left(du^1,du^2\right)$ o direcție tangentă suprafeței *S*. Forma pătratică

(9.4) $$\Psi\left(P,du\right)=\sum_{i,j=1}^{2}b_{ij}du^idu^j=b_{11}\left(du^1\right)^2+2b_{12}du^1du^2+b_{22}\left(du^2\right)^2$$

se numeşte, de asemenea, forma a II-a fundamentală a suprafeței.

În notațiile lui Gauss, forma a II-a fundamentală se scrie

(9.5) $$\Psi\left(P,du,dv\right)=Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2,$$

în care *L,M,N* sunt funcții de *u* şi *v*.

Căutăm expresiile formei a II-a fundamentale în celelalte două reprezentări posibile ale suprafeței *S*. În acest scop continuăm considerațiile şi calculele care ne-au condus la expresiile coeficienților formei I-a fundamentale în reprezentarea explicită şi respectiv în reprezentarea implicită a suprafeței *S*. Reprezentarea parametrică $\vec{r}\left(u,v\right)=\left(u,v,f\left(u,v\right)\right)$ care provine din reprezentarea explicită $z=f\left(x,y\right)$, $\left(x,y\right)\in D\subseteq\mathbb{R}^2$, ne-a condus la $\overrightarrow{r_u}=\left(1,0,p\right)$, $\overrightarrow{r_v}=\left(0,1,q\right)$. Derivând în continuare obținem $\overrightarrow{r_{uu}}=\left(0,0,r\right),\overrightarrow{r_{uv}}=\left(0,0,s\right),\overrightarrow{r_{vv}}=\left(0,0,t\right)$, unde $r=f_{xx},s=f_{xy},t=f_{yy}$ în notații Monge.

Formulele de calcul ale coeficienților *L, M, N* conduc în această reprezentare la formulele

(9.6) $$L=\frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}},M=\frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}},N=\frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}}.$$

Determinantul matricei formei a II-a fundamentale este $\frac{rs-t^2}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$.

În situația în care suprafața S este reprezentată implicit prin ecuația $F(x,y,z)=0$, cu condiția $F_z\neq 0$, pe o submulțime deschisă în $\mathbb{R}^3$, se poate obține reprezentarea explicită $z=f(x,y)$ şi am vazut mai sus că $p=-\frac{F_x}{F_z},q=-\frac{F_y}{F_z}$.

Derivăm p şi q în raport cu x şi y pentru a obține derivatele r, s, t. După calcule, rezultă următoarele expresii ale coeficienților formei a II-a fundamentale

(9.7) $$L=\frac{F_xF_{xz}-F_{xx}F_z}{|F_z|\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}},M=\frac{F_xF_{yz}-F_{xy}F_z}{|F_z|\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}},N=\frac{F_yF_{yz}-F_{yy}F_z}{|F_z|\sqrt{F_x^2+F_y^2+F_z^2}}$$

Coeficienții formei a II-a fundamentale decid forma suprafeței în vecinătatea unui punct al suprafeței. Aceasta rezultă din următoarele considerații.

Fie un punct P al suprafeței elementare S reprezentată explicit prin ecuația $z=f(x,y)$, $(x,y)\in D\subseteq\mathbb{R}^2$. Alegem reperul $\mathfrak{R}$ din E^3 încât originea sa O să fie P iar axa Oz să coincidă cu normala în P la suprafața S. Condiția ca vectorul normal unitar $\overrightarrow{N}=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}(-p,-q,1)$ să coincidă cu $\vec{k}$ ne dă că $p=q=0$ în punctul $P(0,0,0)$.

Coeficienții formei a II-a fundamentale sunt dați de (9.6). Dezvoltăm funcția $z=f(x,y)$ în serie Taylor în vecinătatea punctului $(0,0)$. Obținem

$$z=\frac{1}{2}\left(rx^2+2sxy+ty^2\right)+...$$

Rezultă că în vecinătatea lui P suprafața S diferă foarte puțin de cuadrica de ecuație

(9.8) $$z=\frac{1}{2}\left(rx^2+2sxy+ty^2\right).$$

Această cuadrică este un paraboloid eliptic dacă $rt-s^2>0$, un paraboloid hiperbolic dacă $rt-s^2<0$ şi cilindru parabolic dacă $rt-s^2=0$, cu $r\neq 0$ sau $t\neq 0$. Aşadar, în vecinătatea unui punct eliptic suprafața diferă foarte puțin de un paraboloid eliptic, în vecinătatea unui punct hiperbolic suprafața diferă foarte puțin de un paraboloid hiperbolic iar în vecinătatea unui punct parabolic în care $L\neq 0$ sau $N\neq 0$, suprafața diferă foarte puțin de un cilindru parabolic.

Această situație explică termenii punct eliptic, punct hiperbolic şi, respectiv, punct parabolic. Nu putem spune nimic despre forma suprafeței în vecinătatea punctelor parabolice în care $L = N = 0$ şi deci $M = 0$. Ea poate fi foarte complicată, dată de termenii de gradul 3 în dezvoltarea în serie Taylor a funcției *z*.

§10. Curburi principale. Curbură totală. Curbură medie.

Definiția 10.1. *Aplicația* $k_n : T_P S \to \mathbb{R}$*, definită prin*

$$k_n(X) = \frac{b(X,X)}{g(X,X)},\ X \in T_P S,\ X \neq 0, \tag{10.1}$$

se numeşte curbura normală a suprafeței în punctul $P \in S$.

Cu $X = \sum X^i \overrightarrow{h_i}$, valoarea funcției curbură normală în *X*, numită simplu curbura normală se scrie

$$k_n(X) = \frac{\sum b_{ij} X^i X^j}{\sum g_{ij} X^i X^j},\ i,j = 1,2. \tag{10.2}$$

Vectorul $X = (X^1, X^2)$ se numeşte vector principal dacă el este punct critic pentru curbura normală k_n. Valoarea curburii normale pentru un vector principal notată prin κ se numeşte curbură principală.

Condiția ca vectorul tangent $X = (X^1, X^2)$ să fie punct critic pentru k_n se scrie $\frac{\partial k_n}{\partial X^1} = 0, \frac{\partial k_n}{\partial X^2} = 0$.

Prin derivare în expresia (10.2) această condiție se scrie în forma

$$\begin{aligned} &(b_{11}X^1 + b_{12}X^2)\Big(\sum_{i,j} g_{ij}X^iX^j\Big) = (g_{11}X^1 + g_{12}X^2)\Big(\sum_{i,j} b_{ij}X^iX^j\Big) \\ &(b_{12}X^1 + b_{22}X^2)\Big(\sum_{i,j} g_{ij}X^iX^j\Big) = (g_{12}X^1 + g_{22}X^2)\Big(\sum_{i,j} b_{ij}X^iX^j\Big) \end{aligned} \tag{10.3}$$

Acest sistem este echivalent cu

$$\frac{b_{11}X^1 + b_{12}X^2}{g_{11}X^1 + g_{12}X^2} = \frac{b_{12}X^1 + b_{22}X^2}{g_{12}X^1 + g_{22}X^2} = \kappa, \tag{10.4}$$

unde κ este valoarea curburii normale pentru vectorul *X*, adică avem $\kappa(P,X) = \frac{b(X,X)}{g(X,X)}$.

Ecuațiile (10.4) se mai pot scrie în forma următoare

(10.5) $$\sum_j \left(b_{ij} - \kappa g_{ij}\right) X^j = 0,\ i = 1,2.$$

Vom folosi această formă pentru a demonstra

Propoziția 10.1. *Un vector X este principal dacă şi numai dacă este vector propriu pentru operatorul Weingarten, corespunzător valorii proprii* κ *(curbură principală).*

Demonstrație. Ecuația matricială $AX = \lambda X$ care dă vectorii proprii ai operatorului Weingarten, se scrie în baza $\left(\overrightarrow{h_1}, \overrightarrow{h_2}\right)$ astfel:

$$A\left(\sum_i X^i \overrightarrow{h_i}\right) = \lambda \sum X^i \overrightarrow{h_i} \Leftrightarrow \sum_{i,j} X^i A_i^j \overrightarrow{h_j} = \lambda \sum X^j \overrightarrow{h_j} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \sum A_i^j X^i = \lambda X^j \Leftrightarrow \sum_{i,j} g^{jk} b_{ki} X^i = \lambda X^j$$

Înmulțim ultima expresie cu g_{sj} şi sumăm după *j*. Rezultă $\sum_i b_{si} X^i = \lambda \sum_j g_{sj} X^j$ sau, după schimbări permise de indici $\sum_j \left(b_{ij} - \lambda g_{ij}\right) X^j = 0$, ecuație care pentru $\lambda = \kappa$ este exact (10.5). ∎

Pe baza Propoziției 10.1 demonstrăm

Propoziția 10.2. *Vectorii principali corespunzători la curburi principale distincte sunt ortogonali.*

Demonstrație. Fie $AX_1 = \kappa_1 X_1$ şi $AX_2 = \kappa_2 X_2$ cu $\kappa_1 \neq \kappa_2$ şi $\kappa_1 \neq 0$. Avem $g\left(X_1, X_2\right) = \dfrac{1}{\kappa_1} g\left(AX_1, X_2\right) = \dfrac{1}{\kappa_1} g\left(X_1, AX_2\right) = \dfrac{\kappa_2}{\kappa_1} g\left(X_1, X_2\right)$.

Pentru $\kappa_2 = 0$, obținem $g\left(X_1, X_2\right) = 0$. Pentru $k_2 \neq 0$, rezultă $\left(1 - \dfrac{k_2}{k_1}\right) g\left(X_1, X_2\right) = 0$, deci, din nou, $g\left(X_1, X_2\right) = 0$.

În cazul în care $\kappa_1 = 0$ şi $\kappa_2 \neq 0$, putem scrie

$$g\left(X_1, X_2\right) = \frac{1}{\kappa_2} g\left(X_1, AX_2\right) = \frac{1}{\kappa_2} g\left(AX_1, X_2\right) = 0.$$ ∎

Amintim că se numeşte **curbură principală** valoarea curburii normale pentru un vector principal.

Am văzut că ecuațiile care dau vectorii principali sunt (10.5). Aceste ecuații constituie un sistem liniar şi omogen în $\left(X^1, X^2\right)$ şi, pentru a exista vectori principali, în mod necesar determinantul acestui sistem trebuie să fie egal cu zero. Aşadar curburile prinicpale sunt date de ecuația

(10.6) $$\begin{vmatrix} b_{11}-\kappa g_{11} & b_{12}-\kappa g_{12} \\ b_{21}-\kappa g_{21} & b_{22}-\kappa g_{22} \end{vmatrix} = 0, \text{ sau}$$

(10.6') $$\left(g_{11}g_{22}-g_{12}^2\right)\kappa^2-\left(g_{11}b_{22}-2g_{12}b_{12}+g_{22}b_{11}\right)k+b_{11}b_{22}-b_{12}^2=0.$$

Propoziția 10.3. *Ecuația (10.6) are soluții reale.*

Demonstrație. Alegem o parametrizare a suprafeței S în care $g_{12}=0$. Discriminantul ecuației (10.6), ecuație de gradul II în κ, este $\left(g_{11}b_2-b_{11}g_{22}\right)^2+4b_{12}^2\geq 0$ cu egalitate dacă și numai dacă $b_{12}=0,\ g_{11}b_{22}-b_{11}g_{22}=0$. Așadar soluțiile ecuației (10.6) sunt reale. Soluțiile k_1,k_2 sunt confundate dacă $\frac{b_{11}}{g_{11}}=\frac{b_{12}}{g_{12}}=\frac{b_{22}}{g_{22}}$. Vom numi planare punctele în care $b_{11}=b_{12}=b_{22}=0$ și ombilicale punctele în care $\frac{b_{11}}{g_{11}}=\frac{b_{12}}{g_{12}}=\frac{b_{22}}{g_{22}}=\frac{1}{R},\ R\neq 0$. Deci în puncte planare avem $k_1=k_2=0$ iar în puncte ombilicale avem $k_1=k_2=\frac{1}{R}$.

Definiția 10.2. *Fie $P\in S$ și κ_1,κ_2 curburile principale în punctul P. Numărul real $K=\kappa_1\kappa_2=\dfrac{b_{11}b_{22}-b_{12}^2}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}$ se numește curbura totală a suprafeței în P.*

*Numărul real $H=\dfrac{\kappa_1+\kappa_2}{2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{g_{11}b_{22}-2g_{12}b_{12}+g_{22}b_{11}}{g_{11}g_{22}-g_{12}^2}$ se numește **curbura medie a suprafeței** în P.*

Fiecărui punct P al suprafeței S putem să-i asociem curbura totală a suprafeței în P și curbura medie a suprafeței în P. Obținem astfel două funcții reale pe S, numite funcții curbură totală și respectiv funcția curbură medie.

Semnul funcției K este dat de natura punctelor suprafeței. Avem $K<0$ în puncte hiperbolice, $K=0$ în puncte parabolice și $K>0$ în puncte eliptice. Punctele planare sunt parabolice iar cele ombilicale sunt puncte eliptice. Situația acestor două categorii de puncte este clarificată în următoarele două propoziții.

Propoziția 10.4. *Planul are toate punctele planare. Dacă o suprafață conexă are toate punctele planare, atunci ea este o regiune conexă a unui plan.*

Demonstrație. Prima afirmație se verifică ușor prin calcul, considerând ecuațiile planului de forma: $x=u, y=v, z=0,\ (u,v)\in R^2$. Fie S o suprafață conexă cu $b_{ij}=0,\ i,j=1,2$. Rezultă $A_j^i=0$ și, din formulele lui Weingarten, urmează $\overrightarrow{N_j}=\vec{0}$, adică $\vec{N}=\overrightarrow{N_0}$ (constant).

Considerăm funcția $\left\langle \overrightarrow{N_0}, \vec{h}\left(u^1, u^2\right)\right\rangle$ pe care o derivăm în raport cu u^1 şi u^2. Rezultă: $\dfrac{\partial\left\langle \overrightarrow{N_0}, \vec{h}\right\rangle}{\partial u^j} = \left\langle \overrightarrow{N_0}, \overrightarrow{h_j}\right\rangle = 0$. Aşadar $\left\langle \overrightarrow{N_0}, \vec{h}\right\rangle = -D$ (constanta reală). Cu $\overrightarrow{N_0} = (A, B, C)$ obținem $Ax\left(u^1,u^2\right) + By\left(u^1,u^2\right) + Cz\left(u^1,u^2\right) + D = 0$. Deci punctul $P\left(x\left(u^1,u^2\right), y\left(u^1,u^2\right), z\left(u^1,u^2\right)\right)$ de pe suprafața S se află în planul de ecuație $Ax + By + Cz + D = 0$. ■

Fie suprafața S sferă de centru O şi rază R. Prin calcul direct, folosind parametrizări de forma

$$\begin{cases} x = R\cos\varphi\sin\theta, \\ y = R\sin\varphi\sin\theta, \\ z = R\cos\theta, \qquad 0 < \varphi < 2\pi,\ 0 < \theta < \pi \end{cases}$$

se constată că punctele sferei sunt ombilicale cu $\kappa_1 = \kappa_2 = \dfrac{1}{R}$ şi deci curbura totală $K = \dfrac{1}{R^2}$, este constantă.

Propoziția 10.5. *O suprafață conexă cu toate punctele ombilicale este o regiune conexă pe o sferă.*

Demonstrație. Fie suprafața *S* cu toate punctele ombilicale, adică

(10.7) $\qquad b_{ij}\left(u^1,u^2\right) = \lambda\left(u^1,u^2\right) g_{ij}\left(u^1,u^2\right)$ cu λ funcție nicăieri zero.

Vom arăta mai întâi că $\lambda = const. \neq 0$.

Scriem (10.7) în forma $\left\langle \vec{N}, \overrightarrow{h_{ij}}\right\rangle = \lambda\left\langle \overrightarrow{h_i}, \overrightarrow{h_j}\right\rangle$ şi o derivăm parțial în raport cu u^k. Obținem $\left\langle \overrightarrow{N_k}, \overrightarrow{h_{ij}}\right\rangle + \left\langle \vec{N}, \overrightarrow{h_{ij,k}}\right\rangle = \lambda_{,k}\left\langle \overrightarrow{h_i}, \overrightarrow{h_j}\right\rangle + \lambda\left\langle \overrightarrow{h_{ik}}, \overrightarrow{h_j}\right\rangle + \lambda\left\langle \overrightarrow{h_i}, \overrightarrow{h_{jk}}\right\rangle$, unde $\lambda_{,k} = \dfrac{\partial\lambda}{\partial u^k}$. Din (10.7) rezultă imediat că $A_j^i = \lambda\delta_j^i$ şi formulele lui Weingarten devin $\overrightarrow{N_j} = -\lambda\overrightarrow{h_j}$. Acestea ne permit să scriem egalitatea precedentă în forma:

$$\lambda_{,k} g_{ij} = -\lambda\left\langle \overrightarrow{h_k}, \overrightarrow{h_{ij}}\right\rangle - \lambda\left\langle \overrightarrow{h_j}, \overrightarrow{h_{ik}}\right\rangle - \lambda\left\langle \overrightarrow{h_i}, \overrightarrow{h_{jk}}\right\rangle + \left\langle \vec{N}, \overrightarrow{h_{ij,k}}\right\rangle.$$

Având în vedere că $\overrightarrow{h_{ij,k}} = \overrightarrow{h_{ik,j}} = \dfrac{\partial^3 h}{\partial u^i \partial u^j \partial u^k}$, obținem

(10.8) $\qquad \lambda_{,k} g_{ij} = \lambda_{,j} g_{ik}$.

Înmulțim în (10.8) prin g^{ik} şi sumăm după *i* şi *k*. Avem în vedere că $\sum_i g^{ik} g_{ij} = \delta_j^k$ şi $\sum_{i,k} g^{ik} g_{ik} = 2$. Obținem $\lambda_{,j} = 2\lambda_{,j}$, adică $\lambda_{,j} = 0$, deci $\lambda = \text{const.}$

Revenind la formulele lui Weingarten, constatăm că putem să le scriem în forma $\frac{\partial}{\partial u^j}\left(\overrightarrow{N}+\lambda\vec{h}\right)=0$ de unde rezultă că $\overrightarrow{N}+\lambda\vec{h}=\vec{a}$ (constant).

Echivalent, $\vec{h}-\frac{1}{\lambda}\vec{a}=-\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{N}$. De aici urmează $\left(\vec{h}-\frac{1}{\lambda}\vec{a}\right)^2=\frac{1}{\lambda^2}$. Deci punctul lui S de vector de poziție $\vec{h}$ este pe sfera de centru $C\left(\frac{\vec{a}}{\lambda}\right)$ și rază $\frac{1}{\lambda}$. ■

§11. Ecuațiile lui Gauss. Ecuațiile Peterson – Mainardi – Codazzi. Curbură Riemanniană

Formulele lui Gauss (FG) și formulele lui Weingarten (FW), introduse în **§8**, pot fi privite, luate la un loc, ca un sistem de ecuații cu derivate parțiale în necunoscutele, funcții vectoriale, $\overrightarrow{h_1},\overrightarrow{h_2},\overrightarrow{N}$. Condițiile de integrabilitate ale acestui sistem sunt

(11.1) $$\frac{\partial\overrightarrow{h_{ij}}}{\partial u^k}=\frac{\partial\overrightarrow{h_{ik}}}{\partial u^j}\left(=\frac{\partial^3\vec{h}}{\partial u^i\partial u^j\partial u^k}\right)$$

(11.1') $$\frac{\partial\overrightarrow{N_i}}{\partial u^j}=\frac{\partial\overrightarrow{N_j}}{\partial u^i}.$$

Detaliem aceste condiții de integrabilitate. Avem:

$$\overrightarrow{h_{ijk}}=\sum_s\left(\Gamma^s_{ij,k}\overrightarrow{h_s}+\Gamma^s_{ij}\overrightarrow{h_{sk}}\right)+b_{ij,k}\overrightarrow{N}+b_{ij}\overrightarrow{N_k},$$

unde prin $,k$ am notat derivata în raport cu $\left(u^k\right)$.

Folosim din nou formulele (FG) și (FW). Obținem

$$\overrightarrow{h_{ijk}}=\sum_s\left(\Gamma^s_{ij,k}+\sum_r\Gamma^r_{ij}\Gamma^s_{rk}-b_{ij}A^s_k\right)\overrightarrow{h_s}+\left(b_{ij,k}+\sum_s\Gamma^s_{ij}b_{rk}\right)\overrightarrow{N}.$$

Schimbăm indicii j și k între ei. Obținem și $\overrightarrow{h_{ikj}}$. Înlocuim acestea în (11.1). Avem în vedere că $\overrightarrow{h_1},\overrightarrow{h_2}$ și $\overrightarrow{N}$ sunt vectori liniar independenți. Rezultă că (11.1) este echivalentă cu următoarele două ecuații:

(11.2) $$\Gamma^s_{ij,k}-\Gamma^s_{ik,j}+\sum_r\Gamma^r_{ij}\Gamma^s_{rk}-\sum_r\Gamma^r_{ik}\Gamma^s_{rj}+b_{ik}A^s_j-b_{ij}A^s_k=0$$

(11.3) $$b_{ij,k}-b_{ik,j}+\sum_r\Gamma^r_{ij}b_{rk}-\sum_r\Gamma^r_{ik}b_{rj}=0.$$

Notăm

(11.4) $$R_{i\ jk}^{s} = \Gamma_{ij,k}^{s} - \Gamma_{ik,j}^{s} + \sum_{r}\left(\Gamma_{ij}^{r}\Gamma_{rk}^{s} - \Gamma_{ik}^{r}\Gamma_{rj}^{s}\right).$$

Se spune că sistemul de funcții de $u^1, u^2, \left(R_{i\ jk}^{s}\right)$, în număr de 16, nu toate distincte, constituie **tensorul de curbură** al suprafeței. Cu această notație, ecuația (11.2) devine

(11.2') $$R_{i\ jk}^{s} = b_{ij}A_k^s - b_{ik}A_j^s.$$

Înmulțim în (11.2') cu g_{sh} şi sumăm după *s*. Notăm

(11.4') $$R_{ihjk} := \sum_{s} g_{hs}R_{i\ jk}^{s}.$$

Avem în vedere că $\sum_{s} A^s{}_k g_{sh} = b_{kh}$. Rezultă

(11.5) $$R_{ihjk} = b_{ij}b_{hk} - b_{ik}b_{hj},\ i, j, k, h = 1, 2.$$

Ecuația (11.5) sau forma echivalentă (11.2) se numeşte **ecuația lui Gauss**.

Setul de funcții $\left(R_{ihjk}\right)$ constituie tensorul de curbură Riemanniană a suprafeței *S*. În acest set sunt 16 funcții dar nu sunt toate distincte pentru că din (11.5) rezultă imediat proprietățile

(i) $R_{ihjk} = -R_{ihkj}$,

(ii) $R_{hijk} = -R_{ihjk}$,

(iii) $R_{ihjk} + R_{ijkh} + R_{ikhj} = 0$ (sumare ciclică după *j, k, h*),

(iv) $R_{ihjk} = R_{jkih}$.

Pe baza acestor proprietăți rezultă că în setul de funcții $\left(R_{ihjk}\right)$, $i, j, k, h = 1, 2$, avem 12 funcții nule iar din cele 4, în general nenule, una singură este esențială R_{1212}, celelalte fiind una egală cu ea şi celelalte două de semn contrar. Aşadar ecuația (11.5) a lui Gauss se reduce la

(11.5') $$R_{1212} = b_{11}b_{22} - b_{12}^2.$$

Funcția R_{1212} se calculează din (11.4'), având în vedere notația (11.4). Ne amintim că funcțiile $\left(\Gamma_{ij}^k\right)$ se calculează cu ajutorul funcțiilor $\left(g_{ij}\right)$ şi derivatelor parțiale $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial u^k}$, *i, j, k* = 1, 2. Aşadar R_{1212} depinde numai de funcțiile $\left(g_{ij}\right)$ şi derivatele parțiale de ordin I şi II ale lor.

Formula curburii totale se poate rescrie, în baza ecuației (11.5') în forma

(11.6) $$K = \frac{R_{1212}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Formula (11.6) conduce la un rezultat important.

Teorema 11.1. *Curbura totală a unei suprafețe depinde numai de forma I-a fundamentală a suprafeței.*

Într-adevăr, deşi curbura totală a fost definită în legătură cu ambele forme fundamentale şi forma ei inițială conține şi coeficienți (b_{ij}), formula (11.6) ne arată că ea depinde numai de funcțiile (g_{ij}) şi derivatele lor parțiale până la ordinul II.

Teorema 11.1 este cunoscută sub denumirea de **Teorema Egregium sau Teorema minunată** a lui Gauss.

Revenim la ecuațiile (11.3). Observăm că 4 din cele 8 ecuații (11.3) şi anume cele cu $j=k,\ i=1$ sau 2 sunt identități. Din cele 4 rămase două sunt esențiale, celelalte două diferă de ele prin semn, şi anume

$$\begin{cases} b_{11,2}-b_{12,1}=\sum_s\left(\Gamma^s_{12}b_{s1}+\Gamma^s_{11}b_{s2}\right), \\ b_{12,2}-b_{22,1}=\sum_s\left(\Gamma^s_{22}b_{s1}+\Gamma^s_{12}b_{s2}\right). \end{cases} \tag{11.7}$$

Ecuațiile (11.7) se numesc **ecuațiile Peterson – Mainardi – Codazzi** (PMC).

Fiind dată o suprafață S putem determina cele două forme fundamentale ale ei, prima fiind şi pozitiv definită. Coeficienții acestor forme sunt legați prin ecuațiile lui Gauss şi ecuațiile PMC. Se poate arăta că cele două forme fundamentale determină suprafața până la o deplasare în spațiu, în sensul următoarei teoreme, numită şi teorema fundamentală a geometriei suprafețelor în E^3.

Teorema lui Bonnet. *Fie $U=\{(u^1,u^2)\}$ un domeniu conex şi simplu conex în $\mathbb{R}^2$. Presupunem că g_{ij} şi b_{ij}, $i,j=1,2$ sunt funcții diferențiabile date pe U care satisfac*

(i) $g_{ij}=g_{ji}$, $g_{ij}\xi^i\xi^j\geq 0$ *cu egalitate dacă şi numai dacă* $0=(\xi^i)\in\mathbb{R}^2$,

(ii) $b_{ij}=b_{ji}$,

(iii) ecuația Gauss, (11.5') şi ecuațiile PMC, (11.7).

Atunci există o imersie $f:U\to E^3$ încât $f(U)=S$ este suprafață în E^3 pentru care (g_{ij}) sunt coeficienții primei forme fundamentale şi (b_{ij}) sunt coeficienții celei de-a doua forme fundamentale (relativ la parametrizarea definită de f). Această suprafață este unică până la o deplasare în E^3.

Pentru demonstrație se poate consulta [1, p.140].

CAPITOLUL 4

CURBE REMARCABILE PE O SUPRAFAȚĂ

Rezumat. Se defineşte curbura normală pentru o direcție $\left(du^1, du^2\right)$ tangentă prin formula $k_n = \dfrac{b_{11}\left(du^1\right)^2 + 2b_{12}du^1du^2 + b_{22}\left(du^2\right)^2}{g_{11}\left(du^1\right)^2 + 2g_{12}du^1du^2 + g_{22}\left(du^2\right)^2}$. Direcțiile pentru care k_n ia valori extreme se numesc direcții principale. O curbă pe suprafața S este linie asimptotică (linie de curbură) dacă direcțiile tangente ei sunt asimptotice (principale). Se stabilesc ecuațiile liniilor asimptotice, ale liniilor de curbură şi se evidențiază proprietăți geometrice ale lor. Se asociază unei curbe pe S un reper mobil (Darboux - Ribaucour) format din versorul $\vec{T}$ al vectorului tangent, versorul $\vec{N}$ al normalei la suprafață şi $\overrightarrow{N_g} = \vec{N} \times \vec{T}$. Variația acestui reper mobil pe curbă este dată de formulele Darboux – Ribaucour: $\dfrac{d\vec{T}}{ds} = k_g \overrightarrow{N_g} + k_n \vec{N}, \dfrac{d\overrightarrow{N_g}}{ds} = -k_g \vec{T} + \tau_g \vec{N}, \dfrac{d\vec{N}}{ds} = -k_n \vec{T} - \tau_g \overrightarrow{N_g}$. Se introduc astfel doi noi invarianți k_g - curbura geodezică, τ_g - torsiunea geodezică. Condiția $\tau_g = 0$ caracterizează liniile de curbură. Condiția $k_g = 0$ introduce curbele numite geodezice pentru care se dau ecuații şi proprietăți geometrice. Invarianții k_g, k_n, τ_g sunt legați de invarianții k şi τ prin formulele: $k_n = k\cos\theta, k_g = k\sin\theta, \tau_g = \tau + \dot{\theta}$, unde $\theta = \sphericalangle\left(\vec{n}, \vec{N}\right)$.

§1. Curbură normală. Direcții asimptotice. Linii asimptotice.

În continuare nu vom mai indica punctul în care se evaluează formele I-a şi a II-a fundamentale ale suprafeței. El va reieşi din context. Amintim:

Definiția 1.1. *Aplicația* $k_n : T_P S \to \mathbb{R}$*, definită prin*

(1.1) $k_n\left(X\right) = \dfrac{b\left(X, X\right)}{g\left(X, X\right)}, \; X \in T_P S, \; X \neq 0$,

se numeşte curbura normală a suprafeței în punctul $P \in S$.

Cu $X = \sum X^i \vec{h_i}$, valoarea funcției curbură normală în *X*, numită simplu curbura normală se scrie

(1.2) $$k_n\left(X\right) = \frac{\sum b_{ij} X^i X^j}{\sum g_{ij} X^i X^j}, \; i, j = 1, 2.$$

Observăm că are loc $k_n(\lambda X) = k_n(X)$ pentru orice $\lambda \neq 0$ număr real, adică funcţia k_n depinde numai de direcţia lui *X*. În particular, putem lua o direcţie tangentă $du = (du^1, du^2)$ şi scrie

(1.3) $$k_n(P, du) = \frac{\sum b_{ij} du^i du^j}{\sum g_{ij} du^i du^j},\ i, j = 1,2.$$

În notaţiile clasice,

(1.3') $$k_n(P, du, dv) = \frac{\Psi(P, du, dv)}{\Phi(P, du, dv)}.$$

Observăm că pentru *P* fixat, curbura normală k_n este funcţie de direcţiile tangente la *S* în *P*.

Ne vor interesa, în cele ce urmează, direcţiile pentru care curbura normală este nulă şi cele pentru care ea are valori extreme (minimă, maximă).

Definiţia 1.2. *O direcţie* $du = (du^1, du^2)$*, tangentă în P la S, se numeşte* ***direcţie asimptotică*** *dacă* $k_n(P, du) = 0$.

După (1.3), direcţia $du = (du^1, du^2)$ este direcţie asimptotică dacă şi numai dacă

(1.4) $$b_{11}(du^1)^2 + 2b_{12}du^1du^2 + b_{22}(du^2)^2 = 0.$$

Ecuaţia (1.4) se numeşte ecuaţia direcţiilor asimptotice. Direcţia $du = (du^1, du^2)$ este complet definită şi de perechea $\left(1, \frac{du^2}{du^1}\right)$. Cu notaţia $m = \frac{du^2}{du^1}$, ecuaţia (1.4) se scrie

(1.4') $$m^2 b_{22} + 2b_{12}m + b_{11} = 0.$$

Aceasta este ecuaţie de gradul II în *m*. Discriminantul ei fiind $b_{12}^2 - b_{11}b_{22}$, rezultă:

(i) în punctele hiperbolice există două direcţii asimptotice distincte,

(ii) în punctele parabolice există o singură direcţie asimptotică (două confundate),

(iii) în punctele eliptice nu există direcţii asimptotice.

Definiţia 1.3. *O curbă pe S se numeşte* ***linie asimptotică*** *sau* ***asimptotă*** *dacă vectorul tangent ei are în toate punctele ei direcţie asimptotică.*

Dacă ecuaţiile unei curbe pe *S* sunt $u^i = u^i(t),\ i = 1,2,\ t \in (a,b)$, vectorul tangent ei este $\sum_{i=1}^{2} \frac{du^i}{dt}\overrightarrow{h_i}$ şi condiţia ca acesta să aibă direcţie asimptotică este

$$(1.5)\qquad b_{11}\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2+2b_{12}\frac{du^1}{dt}\frac{du^2}{dt}+b_{22}\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2=0.$$

Ecuația (1.5) este ecuația diferențială a liniilor asimptotice pe S.

Definiția 1.3 corelată cu rezultatele privind existența direcțiilor asimptotice ne arată că

(i) printr-un punct hiperbolic trec două linii asimptotice distincte,

(ii) printr-un punct parabolic trece o linie asimptotică,

(iii) printr-un punct eliptic nu trece nici o linie asimptotică.

Determinarea linilor asimptotice, când există, se face prin rezolvarea ecuației (1.5), căutând linia asimptotică în forma, de exemplu, $u^2=u^2\left(u^1\right),\ u^1\in(c,d)$.

Ecuația (1.5) devine

$$(1.5')\, b_{22}\left(\frac{du^2}{du^1}\right)^2+2b_{12}\frac{du^2}{du^1}+b_{11}=0,$$

ecuație echivalentă cu două (posibil confundate) ecuații diferențiale de ordinul întâi, de forma $\frac{du^2}{du^1}=f\left(u^1,u^2\left(u^1\right)\right)$, integrabile prin cuadraturi.

Pentru a obține caracterizări geometrice ale liniilor asimptotice vom stabili mai întâi expresia vectorului $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ în reperul lui Gauss, pentru $\vec{r}=\vec{h}\left(u^1(t),u^2(t)\right),\ t\in(a,b)$, ecuația unei curbe pe S. Știm că avem $\frac{d\vec{r}}{dt}=\sum_{i=1}^{2}\overrightarrow{h_i}\frac{du^i}{dt}$. Derivăm din nou, în raport cu t. Obținem:

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\sum_i\frac{d^2u^i}{dt^2}\overrightarrow{h_i}+\sum_i\left(\frac{\partial\overrightarrow{h_i}}{\partial u^1}\frac{du^1}{dt}+\frac{\partial\overrightarrow{h_i}}{\partial u^2}\frac{du^2}{dt}\right)\frac{du^i}{dt}=\sum_i\frac{d^2u^i}{dt^2}\overrightarrow{h_i}+\sum_{i,j}\overrightarrow{h_{ij}}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}.$$

Înlocuim $\overrightarrow{h_{ij}}$ din formulele lui Gauss şi rezultă

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\sum_i\frac{d^2u^i}{dt^2}\overrightarrow{h_i}+\sum_{i,j,k}\Gamma_{ij}^k\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}\overrightarrow{h_k}+\left(\sum_{i,j}b_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}\right)\overrightarrow{N},$$

unde însumările se fac după indicii scrişi sub semnul $\sum$, de la 1 la 2. În prima sumă din dreapta schimbăm i cu k (i este indice de însumare), grupăm după $\overrightarrow{h_k}$ şi obținem

$$(1.6)\quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}=\sum_k\left(\frac{d^2u^k}{dt^2}+\sum_{i,j}\Gamma_{ij}^k\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}\right)\overrightarrow{h_k}+\left(\sum_{i,j}b_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}\right)\overrightarrow{N}.$$

Observăm că spre deosebire de $\frac{d\vec{r}}{dt}$, vectorul $\frac{d^2\vec{r}}{dt}$ nu este, în general, conținut în spațiul tangent $T_P S$. Acest vector are atât componentă tangențială dată de

$$(1.6') \quad \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)^{\mathrm{T}} := \left(\frac{d^2u^1}{dt^2} + \sum_{i,j}\Gamma^1_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}\right)\overrightarrow{h_1} + \left(\frac{d^2u^2}{dt^2} + \sum_{i,j}\Gamma^2_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}\right)\overrightarrow{h_2}$$

cât şi componentă normală dată de

$$(1.6'') \quad \left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)^{\perp} := \left(\sum_{i,j} b_{ij}\frac{du^i}{dt}\frac{du^j}{dt}\right)\overrightarrow{N}.$$

Din (1.6'') rezultă imediat

Propoziția 1.1. *O curbă C pe S de ecuație* $\vec{r} = \vec{h}\left(u^1(t), u^2(t)\right)$, $t \in (a,b)$ *este linie asimptotică dacă şi numai dacă* $\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)^{\perp} = 0$, *adică dacă şi numai dacă vectorul* $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ *aparține spațiului tangent la S.*

Corolar 1.1. *Orice dreaptă pe o suprafață este linie asimptotică.*

Demonstrație. Pentru o dreaptă pe S avem $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 0$, fapt care atrage $\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)^{\mathrm{T}} = 0$ şi $\left(\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)^{\perp} = 0$. După Propoziția 1.1, acea dreaptă de pe S este linie asimptotică. ■

Are loc următoarea caracterizare a liniilor asimptotice.

Propoziția 1.2. *O curbă pe S este linie asimptotică dacă şi numai dacă în fiecare punct al ei planul osculator coincide cu planul tangent suprafeței.*

Demonstrație. Coincidența despre care este vorba se înțelege că are loc în fiecare punct P al curbei. Ştim că planul osculator al curbei este determinat de P, $\frac{d\vec{r}}{dt}$ şi $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$. Fie curba linie asimptotică. Atunci, după Propoziția 1.1, $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ este, de asemenea, în planul tangent suprafeței, deci planul osculator curbei coincide cu planul tangent la suprafață. Reciproc, dacă suntem pe o curbă al cărei plan osculator coincide cu planul tangent suprafeței, vectorul $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ din planul ei osculator, fiind şi în planul tangent suprafeței, va avea componenta normală zero şi, după Propoziția 1.1, curba este linie asimptotică. ■

Fie, din nou, o curbă pe suprafaţa *S*, reprezentată parametric prin $\vec{r}=\vec{h}\left(u^1(s),u^2(s)\right)$, $s\in[0,L]$, cu *s* lungime de arc. Într-un punct fixat *P* al ei, normala principală $\vec{n}$ şi normala la suprafaţă $\overrightarrow{N}$ sunt în acelaşi plan, planul normal curbei în *P*. Fie $\theta=\sphericalangle\left(\vec{n},\overrightarrow{N}\right)$. Avem $\cos\theta=\left\langle\vec{n},\overrightarrow{N}\right\rangle=\frac{1}{k}\left\langle\frac{d^2\vec{r}}{ds^2},\overrightarrow{N}\right\rangle$, unde *k* este curbura curbei. După (1.6), $\left\langle\frac{d^2\vec{r}}{ds^2},\overrightarrow{N}\right\rangle=\sum_{i,j}b_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}=\frac{1}{ds^2}\left(\sum_{i,j}b_{ij}du^idu^j\right)$. Dar $ds^2=\sum_{i,j}g_{ij}du^idu^j$ şi obţinem,

$$(1.7)\quad k_n=\left\langle\frac{d^2\vec{r}}{ds^2},\overrightarrow{N}\right\rangle.$$

Aşadar avem

$$(1.8)\qquad k_n=k\cos\theta.$$

§2. Direcţii principale într-un punct al unei suprafeţe. Linii de curbură.

Ne ocupăm de direcţiile tangente unei suprafeţe *S* pe care curbura normală ia valori extreme.

Fie o direcţie tangentă $du=\left(du^1,du^2\right)$. Curbura normală într-un punct $P\in S$, fixat, apare ca funcţie de variabilele du^1,du^2, funcţie dată de (1.3).

Definiţia 2.1. *Direcţia tangentă la S,* $\left(du^1,du^2\right)$, *se numeşte direcţie principală dacă ea este punct critic pentru curbura normală, adică*

$$(2.1)\qquad \frac{\partial k_n}{\partial\left(du^1\right)}=0,\ \frac{\partial k_n}{\partial\left(du^2\right)}=0.$$

Valoarea curburii normale pentru o direcţie principală se numeşte curbură principală şi se va nota prin κ.

Prin derivare în (1.3), condiţiile (2.1), după o simplificare cu 2, devin:

$$(*)\quad\begin{cases}\left(b_{11}du^1+b_{12}du^2\right)\left(\sum_{i,j}g_{ij}du^idu^j\right)=\left(g_{11}du^1+g_{12}du^2\right)\left(\sum_{i,j}b_{ij}du^idu^j\right)\\ \left(b_{12}du^1+b_{22}du^2\right)\left(\sum_{i,j}g_{ij}du^idu^j\right)=\left(g_{12}du^1+g_{22}du^2\right)\left(\sum_{i,j}b_{ij}du^idu^j\right).\end{cases}$$

Pentru $\left(du^1, du^2\right)$ soluţie a acestui sistem, raportul $\left(\sum_{i,j} b_{ij} du^i du^j\right) \Big/ \left(\sum_{i,j} g_{ij} du^i du^j\right)$ este exact κ. Cu această notaţie sistemul (*) ia forma

$$(2.2)\quad \frac{b_{11}du^1 + b_{12}du^2}{g_{11}du^1 + g_{12}du^2} = \frac{b_{12}du^1 + b_{22}du^2}{g_{12}du^1 + g_{22}du^2} = \kappa .$$

Aşadar direcţiile principale sunt soluţii ale ecuaţiei dată de prima egalitate din (2.2), care, după calcule, se dovedeşte a fi echivalentă cu

(2.3)

$$\left(b_{11}g_{12} - b_{12}g_{11}\right)\left(du^1\right)^2 + \left(b_{11}g_{22} - b_{22}g_{11}\right)du^1du^2 + \left(b_{12}g_{22} - b_{22}g_{12}\right)\left(du^2\right)^2 = 0 .$$

Aceasta este ecuaţia direcţiilor principale.

Ea se scrie şi în forma, uşor de reţinut,

$$(2.3')\quad \begin{vmatrix} \left(du^2\right)^2 & -du^1du^2 & \left(du^1\right)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} = 0 .$$

Există direcţii principale? Trebuie să cercetăm dacă ecuaţia (2.3), ca ecuaţie de gradul 2 în $m = \dfrac{du^2}{du^1}$, are soluţii reale. Pentru a simplifica unele calcule, să alegem parametrizarea suprafeţei încât liniile parametrice $u^1 = const.$ şi $u^2 = const.$ să fie ortogonale, echivalent $g_{12} = 0$. Discriminantul ecuaţiei (2.3) este $\delta = \left(b_{11}g_{22} - b_{22}g_{11}\right)^2 + 4b_{12}^2 g_{11}g_{22} \geq 0$, cu egalitate pentru $b_{12} = 0$ şi $\dfrac{b_{11}}{g_{11}} = \dfrac{b_{22}}{g_{22}}$.

Amintim că $g_{11} > 0$ şi $g_{22} > 0$.

Reapar cele două clase de puncte pe *S*.

Definiţia 2.2. *1. Punctele pe S în care avem* $b_{11} = b_{12} = b_{22} = 0$, *se numesc* ***puncte planare.***

2. Punctele pe S în care are loc

$$(2.4)\quad \frac{b_{11}}{g_{11}} = \frac{b_{12}}{g_{12}} = \frac{b_{22}}{g_{22}} = \frac{1}{R},\ R \neq 0 ,$$

se numesc ***puncte ombilicale.***

Rezultă că în punctele neplanare şi neombilicale există două direcţii principale reale, distincte. După Propoziţia 10.2, din Capitolul 3, acestea sunt ortogonale. În punctele planare şi în cele ombilicale direcţiile principale sunt nedeterminate în sensul că orice direcţie tangentă în $P \in S$ este direcţie principală.

Definiţia 2.3. *O curbă pe S se numeşte* ***linie de curbură*** *dacă în toate punctele curbei direcţia tangentei la curbă este direcţie principală pe suprafaţa S.*

Din (2.3') rezultă că ecuaţia diferenţială a liniilor de curbură este

$$(2.5)\qquad \begin{vmatrix} \left(\frac{du^2}{dt}\right)^2 & -\frac{du^1}{dt}\frac{du^2}{dt} & \left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \end{vmatrix} = 0 .$$

Prin punctele neplanare şi neombilicale trec două linii de curbură, reale şi ortogonale. În punctele planare şi ombilicale liniile de curbură sunt nedeterminate.

§3. Formulele Darboux - Ribaucour. Geodezice.

Fie suprafaţa *S* dată parametric prin

(3.1) $\vec{r} = \vec{h}\left(u^1, u^2\right)$, $\overrightarrow{h_1} \times \overrightarrow{h_2} \neq \vec{0}$ pe *U* domeniu în $\mathbb{R}^2$.

Fie pe *S* o curbă *C* de ecuaţii

(3.2) $u^i = u^i(s),\ s \in [0, L], (i = 1, 2)$,

încât, dacă

(3.2') $\vec{r} = \vec{h}\left(u^1(s), u^2(s)\right),\ s \in [0, L]$,

este ecuaţia curbei în spaţiu, să avem

(3.3) $\left\| \frac{d\vec{h}}{ds} \right\| = 1,\ s \in [0, L]$.

Altfel spus, parametrul *s* este dat de lungimea de arc a curbei *C*.

Notăm $\vec{\mathrm{T}}(s) = \frac{d\vec{h}}{ds}$ şi $\overrightarrow{N_g}(s) = \vec{N}(s) \times \vec{T}(s),\ s \in [0, L]$.

Definiţia 3.1. *Reperul* $\left\{P(s), \left(\vec{T}(s), \overrightarrow{N_g}(s), \vec{N}(s)\right)\right\}$ *se numeşte reperul* ***Darboux – Ribaucour****. Cu s variabil, el este un reper mobil pe C.*

Studiem variaţia acestui reper. În acest scop vom exprima vectorii $\frac{d\vec{T}}{ds}, \frac{d\overrightarrow{N_g}}{ds}, \frac{d\vec{N}}{ds}$ în baza $\left(\vec{T}, \overrightarrow{N_g}, \vec{N}\right)$. Observăm că această bază este ortonormată şi pozitiv orientată.

Fie pentru început

$$(3.4)\quad \begin{cases} \dfrac{d\vec{T}}{ds} = a_{11}\vec{T} + a_{12}\overrightarrow{N_g} + a_{13}\vec{N} \\ \dfrac{d\overrightarrow{N_g}}{ds} = a_{21}\vec{T} + a_{22}\overrightarrow{N_g} + a_{23}\vec{N}, \\ \dfrac{d\vec{N}}{ds} = a_{31}\vec{T} + a_{32}\overrightarrow{N_g} + a_{33}\vec{N}, \end{cases}$$

unde matricea (a_{ij}) $i, j = 1,2,3$ urmează a fi determinată.

Egalitățile

$$\left\langle \vec{T}, \frac{d\vec{T}}{ds} \right\rangle = 0, \left\langle \overrightarrow{N_g}, \frac{d\overrightarrow{N_g}}{ds} \right\rangle = 0, \left\langle \vec{N}, \frac{d\vec{N}}{ds} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \frac{d\vec{T}}{ds}, \overrightarrow{N_g} \right\rangle + \left\langle \vec{T}, \frac{d\overrightarrow{N_g}}{ds} \right\rangle = 0, \left\langle \frac{d\overrightarrow{N_g}}{ds}, \vec{N} \right\rangle + \left\langle \overrightarrow{N_g}, \frac{d\vec{N}}{ds} \right\rangle = 0,$$

$$\left\langle \frac{d\vec{N}}{ds}, \vec{T} \right\rangle + \left\langle \vec{N}, \frac{d\vec{T}}{ds} \right\rangle = 0,$$

obținute prin derivarea condițiilor de ortonormalitate ale bazei $\left(\vec{T}, \overrightarrow{N_g}, \vec{N}\right)$, în combinație cu (3.4) ne arată că matricea (a_{ij}) $i, j = 1,2,3$ este antisimetrică.

Înmulțind scalar cu $\vec{N}$ în prima formulă (3.4) obținem $a_{13} = \left\langle \dfrac{d\vec{T}}{ds}, \vec{N} \right\rangle = \left\langle \dfrac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \vec{N} \right\rangle = k_n$, după (1.7). Aşadar avem $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 0$; $a_{13} = -a_{31} = k_n$. Notăm $a_{12} = -a_{21} = k_g$ şi $a_{23} = -a_{32} = \tau_g$. Formulele (3.4) devin **formulele Darboux – Ribaucour**:

$$(3.5)\quad \begin{aligned} \frac{d\vec{T}}{ds} &= k_g\overrightarrow{N_g} + k_n\vec{N}, \\ \frac{d\overrightarrow{N_g}}{ds} &= -k_g\vec{T} + \tau_g\vec{N}, \\ \frac{d\vec{N}}{ds} &= -k_n\vec{T} - \tau_g\overrightarrow{N_g}. \end{aligned}$$

Acestea se pot scrie simbolic astfel

$$(3.5')\, \frac{d}{ds}\begin{bmatrix} \overrightarrow{T} \\ \overrightarrow{N_g} \\ \overrightarrow{N} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & \tau_g \\ -k_n & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overrightarrow{T} \\ \overrightarrow{N_g} \\ \overrightarrow{N} \end{bmatrix}.$$

În §1 am văzut că o curbă pe S este linie asimptotică dacă şi numai dacă funcția $s \to k_n(s),\ s \in [0, L]$ este identic nulă. Ne interesează ce curbe sunt caracterizate de anularea **torsiunii geodezice** τ_g şi respectiv a **curburii geodezice** k_g.

Vom stabili la început o formulă de calcul pentru τ_g. Prin înmulțire scalară cu $\overrightarrow{N_g}$ în ultima formulă Darboux – Ribaucour, obținem $\tau_g = -\left\langle \frac{d\overrightarrow{N}}{ds}, \overrightarrow{N_g} \right\rangle$ şi deci

$$(3.6)\ \ \tau_g = \left(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N}, \frac{d\overrightarrow{N}}{ds} \right) \text{ (produs mixt).}$$

Dar după (FW), vectorul $\frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = \sum_{i=1}^{2} \overrightarrow{N_i} \frac{du^i}{ds} = -\sum_{i,j} \left(A_i^j \frac{du^i}{ds} \right) \overrightarrow{h_j}$, care substituit în (3.6) conduce la

$$\tau_g = \left(\sum_i \overrightarrow{h_i} \frac{du^i}{ds}, \sum_j \left(\sum_i A_i^j \frac{du^i}{ds} \right) \overrightarrow{h_j}, \overrightarrow{N} \right) = \left[\frac{du^1}{ds} \left(\sum_i A_i^2 \frac{du^i}{ds} \right) - \frac{du^2}{ds} \left(\sum_i A_i^1 \frac{du^i}{ds} \right) \right] \left(\overrightarrow{h_1}, \overrightarrow{h_2}, \overrightarrow{N} \right).$$

Un calcul simplu arată că $\left(\overrightarrow{h_1}, \overrightarrow{h_2}, \overrightarrow{N} \right) = \sqrt{\Delta}$. Aşadar rezultă

$$(3.7)\ \ \tau_g = \sqrt{\Delta} \begin{vmatrix} \frac{du^1}{ds} & \frac{du^2}{ds} \\ \sum_i A_i^1 \frac{du^i}{ds} & \sum_i A_i^2 \frac{du^i}{ds} \end{vmatrix}.$$

Dar după formulele (8.8) din Capitolul 3,

$$\sum_i A_i^1 \frac{du^i}{ds} = A_1^1 \frac{du^1}{ds} + A_2^1 \frac{du^2}{ds} = \left(g^{11} b_{11} + g^{12} b_{21} \right) \frac{du^1}{ds} +$$

$$+ \left(g^{11} b_{12} + g^{12} b_{22} \right) \frac{du^2}{ds} = \frac{1}{\Delta} \left(g_{22} b_{11} - g_{12} b_{21} \right) \frac{du^1}{ds} + \frac{1}{\Delta} \left(g_{22} b_{12} - g_{12} b_{22} \right) \frac{du^2}{ds}$$

şi similar,

$$\sum_i A_i^2 \frac{du^i}{ds} = \frac{1}{\Delta}\left(g_{11}b_{21} - g_{12}b_{11}\right)\frac{du^1}{ds} + \frac{1}{\Delta}\left(g_{11}b_{22} - g_{12}b_{12}\right)\frac{du^2}{ds}.$$

Înlocuind în (3.7) obținem

$$\tau_g = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left[\left(g_{11}b_{12} - g_{12}b_{11}\right)\left(\frac{du^1}{ds}\right)^2 + \left(g_{11}b_{22} - g_{22}b_{11}\right)\frac{du^1}{ds}\frac{du^2}{ds} + \left(g_{12}b_{22} - g_{22}b_{12}\right)\left(\frac{du^2}{ds}\right)^2\right]$$

sau

$$(3.8)\ \ \tau_g = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix} \left(\frac{du^2}{ds}\right)^2 & -\frac{du^1}{ds}\frac{du^2}{ds} & \left(\frac{du^1}{ds}\right)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ b_{11} & b_{12} & b_{22} \end{vmatrix}.$$

Comparând (3.8) cu (2.5) obținem

Propoziția 3.1. *O curbă pe suprafața S este linie de curbură pe S dacă şi numai dacă în punctele curbei are loc* $\tau_g = 0$.

În concluzie, anularea invarianților k_n şi τ_g caracterizează curbele pe *S* studiate anterior, linii asimptotice şi respectiv linii de curbură. Invariantul k_g va fi folosit pentru a introduce o nouă clasă de curbe numite **geodezice** pe *S*.

Definiția 3.2. *O curbă pe suprafața S, cu proprietatea că în punctele ei are loc egalitatea* $k_g = 0$*, se numeşte geodezică pe S.*

Stabilim acum formule de calcul pentru k_g.

Prin înmulțire scalară cu $\overrightarrow{N_g}$ în prima formulă Darboux – Ribaucour obținem $k_g = \left\langle \frac{d\vec{T}}{ds}, \overrightarrow{N_g} \right\rangle = \left(\frac{d\vec{T}}{ds}, \vec{N}, \vec{T}\right)$ sau

$$(3.9)\ \ k_g = \left(\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \vec{N}\right).$$

Trecând la o parametrizare oarecare a curbei, de parametru *t*, folosind

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{dt}{ds},\ \ \frac{d^2\vec{r}}{ds} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \frac{d\vec{r}}{dt}\frac{d^2t}{ds^2},$$

obținem

$$(3.10)\qquad k_g = \left(\frac{d\vec{r}}{dt}, \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}, \vec{N}\right)\cdot\frac{1}{\left\|\vec{r}'(t)\right\|^3}.$$

Vom da o altă formă lui k_g folosind (1.6). Plecând cu (3.9) avem:

$$k_g = \left(\sum_i h_i \frac{du^i}{ds}, \left(\frac{d^2u^1}{ds^2} + B^1 \right)\overrightarrow{h_1} + \left(\frac{d^2u^2}{ds^2} + B^2 \right)\overrightarrow{h_2} + \left(\sum_{i,j} b_{ij} \frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds} \right)\overrightarrow{N}, \overrightarrow{N} \right),$$

unde $B^1 = \sum_{i,j} \Gamma^1_{ij} \frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}$, $B^2 = \sum_{i,j} \Gamma^2_{ij} \frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}$. Pe baza proprietăţilor produsului mixt, obţinem $k_g = \left[\frac{du^1}{ds}\left(\frac{d^2u^2}{ds^2} + B^2 \right) - \frac{du^2}{ds}\left(\frac{d^2u^1}{ds^2} + B^1 \right) \right]\left(\overrightarrow{h_1}, \overrightarrow{h_2}, \overrightarrow{N} \right)$ sau

$$(3.11) \qquad k_g = \begin{vmatrix} \dfrac{du^1}{ds} & \dfrac{du^2}{ds} \\ \dfrac{d^2u^1}{ds^2} + B^1 & \dfrac{d^2u^2}{ds^2} + B^2 \end{vmatrix} \sqrt{\Delta}.$$

Revenim la (3.9) şi constatăm că avem $k_g = 0$, dacă şi numai dacă vectorii $\frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}, \overrightarrow{N}$ sunt coplanari, altfel spus $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ este în planul determinat de punctul curbei şi vectorii $\frac{d\vec{r}}{ds}$ si $\overrightarrow{N}$. Dar condiţia $\left\| \frac{d\vec{r}}{ds} \right\| = 1$, adică $\left(\frac{d\vec{r}}{ds} \right)^2 = 1$, prin derivare ne dă $\left\langle \frac{d\vec{r}}{ds}, \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right\rangle = 0$. Deci $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ este ortogonal pe $\frac{d\vec{r}}{ds}$, echivalent este coliniar cu $\overrightarrow{N}$. Aşadar are loc

Propoziţia 3.2. *O curbă pe S, de ecuaţie* $\vec{r} = \vec{r}\left(u^1(s), u^2(s)\right)$, $s \in [0, L]$ *cu parametru s lungime de arc, este geodezică dacă şi numai dacă vectorul* $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ *este coliniar cu* $\overrightarrow{N}$ *de-a lungul curbei.*

Subliniem că parametrizarea prin lungime de arc în Propoziţia 3.2 este esenţială. Proprietatea nu mai are loc în altă parametrizare. Mai exact, dacă pe o geodezică $(k_g = 0)$ trecem la altă parametrizare dată de un parametru *t*, curba continuă să fie geodezică $(k_g = 0)$ dar $\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$ nu este coliniar cu $\overrightarrow{N}$.

Corolar 3.1. *O curbă C pe S de ecuaţie* $u^i = u^i(s)$, $s \in [0, L]$ $i = 1, 2$ *cu s lungime de arc este geodezică dacă şi numai dacă funcţiile* (u^i) $i = 1, 2$ *sunt soluţii ale sistemului de ecuaţii diferenţiale de ordinul 2,*

(3.12) $$\frac{d^2u^i}{ds^2}+\sum_{j,k}\Gamma^i_{jk}\left(u^1(s),u^2(s)\right)\frac{du^j}{ds}\frac{du^k}{ds}=0,\ i=1,2.$$

Demonstraţie. Scriem formula (1.6) cu parametrul s. După Propoziţia 3.2, curba C este geodezică dacă şi numai dacă componenta tangenţială a vectorului $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ este nulă. Cum $\vec{h_1}$ şi $\vec{h_2}$ sunt vectori liniar independenţi, acest fapt este echivalent cu (3.12). ■

Ecuaţiile (3.12) se numesc **ecuaţiile diferenţiale ale geodezicilor** suprafeţei S. Parametrizarea prin lungime de arc este şi aici esenţială. La trecerea la un parametru oarecare t, ecuaţiile (3.12) se complică prin apariţia în membrul drept a unui termen în general diferit de zero. (Exerciţiu). Sistemul (3.12) îşi menţine forma numai pentru reparametrizări ale curbei de forma $s'=\pm s+c,\ c\in\mathbb{R}$.

Are loc următoarea caracterizare geometrică a geodezicilor.

Propoziţia 3.3. *O curbă pe S este geodezică dacă şi numai dacă în fiecare punct al curbei planul ei osculator conţine normala la suprafaţă în acel punct.*

Demonstraţie. Condiţia $k_g=0$ este echivalentă cu coplanaritatea vectorilor $\frac{d\vec{r}}{ds},\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ si $\vec{N}$. Cum planul osculator este determinat de $\frac{d\vec{r}}{ds}$ si $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}$ rezultă că această condiţie este echivalentă cu situarea normalei la S în planul osculator al curbei. ■

Sistemul de ecuaţii diferenţiale (3.12) este neliniar dar coeficienţii săi sunt funcţii diferenţiabile. Teorema de existenţă şi unicitate pentru sisteme de acest tip justifică

Propoziţia 3.4. *Prin orice punct* $P_0\left(u_0^1,u_0^2\right)$ *şi în orice direcţie tangentă* $\left(a^1,a^2\right)$ *trece o singură geodezică.*

Demonstraţie. Sistemul (3.12) admite soluţia unică

(3.13) $$\begin{cases} u^1=u^1(s) \\ u^2=u^2(s),\ s\in[0,\varepsilon), \end{cases}$$

cu $\varepsilon>0$, soluţie care pentru $s=0$ satisface condiţiile iniţiale

$$u^1(0)=u_0^1,\quad \frac{du^1}{ds}(0)=a^1,$$
$$u^2(0)=u_0^2,\quad \frac{du^2}{ds}(0)=a^2.$$

Ecuaţiile (3.13) definesc o geodezică prin S care trece prin $P_0\left(u_0^1,u_0^2\right)$ şi are în acel punct direcţia tangentă $\left(a^1,a^2\right)$. ■

Revenim la curbe oarecare pe suprafața *S*. Pentru o asemenea curbă avem invarianții k_g, k_n, τ_g precum şi invarianții curbură k şi torsiune τ când este privită ca o curbă în spațiu. În mod necesar primii trei trebuie să se exprime cu k şi τ, şi invers. Stabilim asemenea exprimări.

Observăm că vectorii $\overrightarrow{N_g}, \vec{N}, \vec{n}$ si $\vec{b}$ sunt în acelaşi plan, perpendicular pe $\vec{T} = \vec{t}$. Notăm $\theta = \sphericalangle\left(\vec{n}, \vec{N}\right)$ şi constatăm că versorii reperului Darboux – Ribaucour se exprimă funcție de versorii reperului Frenet astfel

$$\text{(3.14)} \qquad \begin{aligned} &\vec{T} = \vec{t}, \\ &\overrightarrow{N_g} = \vec{n}\sin\theta - \vec{b}\cos\theta, \\ &\vec{N} = \vec{n}\cos\theta + \vec{b}\sin\theta. \end{aligned}$$

Invers, versorii reperului Frenet se exprimă în funcție de versorii reperului Darboux – Ribaucour în forma

$$\text{(3.15)} \qquad \begin{aligned} &\vec{t} = \vec{T}, \\ &\vec{n} = \overrightarrow{N_g}\sin\theta + \vec{N}\cos\theta, \\ &\vec{b} = -\overrightarrow{N_g}\cos\theta + \vec{N}\sin\theta. \end{aligned}$$

În formula $\dfrac{d\overrightarrow{N_g}}{ds} = \dot{\vec{n}}\sin\theta + \dot{\theta}\,\vec{n}\cos\theta - \dot{\vec{b}}\cos\theta + \dot{\theta}\,\vec{b}\sin\theta$, folosim formulele lui Frenet, formulele lui Darboux – Ribaucour şi (15.14) pentru a obține

$$-k_g\vec{t} + \tau_g\left(\vec{n}\cos\theta + \vec{b}\sin\theta\right) = \left(-k\vec{t} + \tau\vec{b}\right)\sin\theta + \dot{\theta}\,\vec{n}\cos\theta + \tau\vec{n}\cos\theta + \dot{\theta}\,\vec{b}\sin\theta,$$

de unde rezultă $k_g = k\sin\theta,\ \tau_g\cos\theta = \dot{\theta}\cos\theta + \tau\cos\theta,\ \tau_g\sin\theta = \dot{\theta}\sin\theta + \tau\sin\theta$.

Din ultimele două ecuații obținem $\tau_g = \tau + \dot{\theta}$. Procedăm similar plecând de la $\dfrac{d\vec{N}}{ds}$ şi obținem $k_n = k\cos\theta$. În concluzie au loc formulele

$$\text{(3.16)} \qquad \begin{aligned} &k_n = k\cos\theta, \\ &k_g = k\sin\theta, \\ &\tau_g = \tau + \dot{\theta}. \end{aligned}$$

Acestea se pot inversa în forma

$$\text{(3.16')} \qquad k = \sqrt{k_n^2 + k_g^2},\ \tau = \tau_g - \dot{\theta}.$$

Formulele (3.16) au loc de-a lungul curbei *C* parametrizată prin lungime de arc. Dacă se trece la un parametru oarecare *t*, primele două formule rămân neschimbate iar ultima devine $\tau_g\left(s(t)\right)=\tau\left(s(t)\right)+\frac{d\theta}{ds}\left(s(t)\right)\frac{1}{\left\|\vec{r}\,'(t)\right\|}$.

Teorema lui Bonnet. *Fie S_1 și S_2 două suprafețe care se intersectează după o curbă C și fie ψ unghiul făcut de normalele lor în lungul curbei C. Atunci, oricare două din afirmațiile următoare implică pe a treia.*

1. *C este linie de curbură pe S_1,*
2. *C este linie de curbură pe S_2,*
3. *Unghiul ψ este constant.*

Demonstrație. Fie $\theta_1=\sphericalangle\left(\vec{n},\overrightarrow{N_1}\right)$ și $\theta_2=\sphericalangle\left(\vec{n},\overrightarrow{N_2}\right)$, unde $\overrightarrow{N_1}$ și $\overrightarrow{N_2}$ sunt vectorii normali unitari la S_1, respectiv S_2. Fie τ_g^1 torsiunea geodezică a curbei *C* pe S_1 și τ_g^2 torsiunea geodezică a curbei *C* pe S_2. Avem, după (3.16), $\tau_g^1=\tau+\dot{\theta}_1$, $\tau_g^2=\tau+\dot{\theta}_2$. Deci $\tau_g^2-\tau_g^1=\frac{d}{ds}\left(\theta_2-\theta_1\right)=\frac{d\psi}{ds}$. Așadar, dacă $\tau_g^1=0$ și $\tau_g^2=0$, atunci $\psi=const$. Dacă $\tau_g^1=0$ și $\psi=const.$, atunci $\tau_g^2=0$ și în sfârșit, dacă $\tau_g^2=0$ și $\psi=const.$, atunci $\tau_g^1=0$. ■

Corolar 3.2. *O sferă taie o suprafață S sub unghi constant dacă și numai dacă curba de intersecție este linie de curbură pe S.*

Demonstrație. Curba de intersecție este linie de curbură pe sferă. Se aplică teorema lui Bonnet. ■

Corolar 3.3. *Dacă două sfere se intersectează, unghiul normalelor în lungul curbei de intersecție este constant.*

Demonstrație. Curba de intersecție este linie de curbură pe ambele suprafețe. Se aplica teorema lui Bonnet. ■

CAPITOLUL 5

CLASE REMARCABILE DE SUPRAFEȚE

Rezumat. Se definește noțiunea de aplicație diferențiabilă $F : S \to \widetilde{S}$ între suprafețele S și $\widetilde{S}$ care se numește corespondența între S și $\widetilde{S}$ dacă este difeomorfism. Corespondența se numește conformă dacă păstrează unghiul oricăror două direcții tangente și se numește izometrie dacă oricare două curbe care se corespund au aceeași lungime. Se demonstrează caracterizări ale corespondențelor conforme și izometrice. Ca aplicație se arată că suprafețele de curbură totală constantă $K = 0$ sunt local izometrice cu un plan, cele de curbură totală constantă pozitivă $K = \frac{1}{R^2}$ sunt local izometrice cu sfera de rază R și că cele de curbură constantă negativă sunt local izometrice cu pseudosfera. Prin rotirea unei curbe în jurul unei drepte pe care nu o intersectează se obține o suprafață de rotație. Se demonstrează proprietăți de bază ale suprafețelor de rotație de ecuații: $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = \psi(u),\ u > 0, v \in \mathbb{R}$ și ale suprafețelor elicoidale, caz în care z are forma $z = \psi(u) + av,\ a \in \mathbb{R}$. O suprafață de ecuații: $\vec{r} = \vec{a}(u) + v\vec{b}(u),\ u \in I \subseteq \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}, \vec{b}^2 = 1$ se numește suprafață riglată sau simplu riglată. Planul tangent ei într-un punct conține generatoarea (curba u = const.) prin acel punct. Riglata se numește desfășurabilă dacă planele tangente ei în punctele unei generatoare coincid. Se arată că această proprietate are loc dacă și numai dacă $\left(\vec{a}', \vec{b}, \vec{b}'\right) = 0$. Riglatele desfășurabile sunt conurile, cilindrii și suprafețele generate de tangentele la curbe date. O suprafață este riglată desfășurabilă dacă și numai dacă $K = 0$. Dată o curbă C închisă în spațiu, suprafața de arie minimă cu frontiera C se numește suprafață minimală. Suprafețele minimale sunt caracterizate de anularea curburii medii ($H = 0$)

§1. Aplicații diferențiabile între suprafețe

Fie S și $\widetilde{S}$ două suprafețe în E^3.

Definiția 1.1. *O aplicație continuă $F : S \to \widetilde{S},\ P \to F(P)$, este diferențiabilă de clasă $C^k\ (k \geq 1)$ în punctul $P \in S$ dacă există o parametrizare $h : U \to S$ cu $P \in h(U)$ și o parametrizare $\tilde{h} : \widetilde{U} \to \widetilde{S}$ cu $F(P) \in \tilde{h}(\widetilde{U})$ încât aplicația $\tilde{h}^{-1} \circ F \circ h : U \to \widetilde{U}$ dată de ecuațiile*

$$(1.1)\qquad \begin{cases} \tilde{u}^1 = \tilde{u}^1(u^1, u^2) \\ \tilde{u}^2 = \tilde{u}^2(u^1, u^2),\ (u^1, u^2) \in U, \end{cases}$$

este diferențiabilă de clasă $C^k\ (k \geq 1)$ pe U.

Aplicația F este *diferențiabilă* de clasă C^k pe S dacă este diferențiabilă în toate punctele suprafeței S.

Definiția 1.2. *O aplicație* $F: S \to \widetilde{S}$, *diferențiabilă de clasă* C^k, *se numeşte* ***corespondență*** *între suprafețele S şi* $\widetilde{S}$ *dacă F este difeomorfism de clasă* C^k, *adică există inversa* F^{-1} *şi* F^{-1} *este aplicație diferențiabilă de clasă* C^k.

În continuare vom considera S şi $\widetilde{S}$ suprafețe elementare. Dacă F este o corespondență între S şi $\widetilde{S}$, aplicația (1.1) este bijectivă şi are proprietatea

$$(1.2) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ pe } U.$$

În acest caz, ecuațiile (1.1) cu condiția (1.2), pot fi privite ca o schimbare de parametrii pe $\widetilde{S}$. După efectuarea acestei schimbări de parametrii, punctele P şi *F(P)* vor avea aceleaşi coordonate $\left(u^1, u^2\right)$ şi aplicația dată de (1.1) se reduce la

$$(1.1') \qquad \begin{cases} \tilde{u}^1 = u^1 \\ \tilde{u}^2 = u^2, \ \left(u^1, u^2\right) \in U. \end{cases}$$

Aplicația diferențiabilă de clasă C^k, $F: S \to \widetilde{S}$, $P \to F(P) = \widetilde{P}$ induce o aplicație liniară $F_{*,p}: T_P S \to T_{\widetilde{P}} \widetilde{S}$, $X \to F_{*,p}(X), X \in T_P S$ între spații tangente, după cum urmează.

Conform Definiției 4.2, Capitolul 3, X este un vector tangent la o curbă $t \to \left(u^1(t), u^2(t)\right)$ care trece prin P la $t = 0$. Definim vectorul tangent $F_{*,p}(X)$ ca fiind vectorul tangent la curba $t \to \left(\tilde{u}^1(t), \tilde{u}^2(t)\right)$ care trece prin $\widetilde{P}$ la $t = 0$. Invităm cititorul să verifice că într-adevăr vectorul $F_{*,p}(X)$ este bine definit (nu depinde de curba aleasă). Componentele lui X în baza $\left(\overrightarrow{h_1}, \overrightarrow{h_2}\right)$ sunt $X^i = \dfrac{du^i}{dt}(0)$, $i = 1,2$. Componentele lui $F_{*,p}(X)$ în baza $\left(\overrightarrow{\tilde{h}_1}, \overrightarrow{\tilde{h}_2}\right)$ vor fi $\widetilde{X}^i = \dfrac{d\tilde{u}^i}{dt}(0) = \dfrac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^1}\dfrac{du^1}{dt}(0) + \dfrac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^2}\dfrac{du^2}{dt}(0) = X^1 \dfrac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^1} + X^2 \dfrac{\partial \tilde{u}^i}{\partial u^2}$. Aşadar aplicația $F_{*,p}: \left(X^1, X^2\right) \to \left(\widetilde{X}^1, \widetilde{X}^2\right)$ se scrie matricial în forma

$$\text{(1.3)} \qquad F_{*,P}(X) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2} \\ \dfrac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1} & \dfrac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X^1 \\ X^2 \end{bmatrix}.$$

Rezultă imediat că $F_{*,P}$ este aplicație liniară. Dacă F este corespondență, este evident că $F_{*,P}$ este izomorfism liniar. Vectorul $\overrightarrow{h_1}$ are componentele (1,0) iar vectorul $\overrightarrow{h_2}$ are componentele (0,1) în baza $\left(\overrightarrow{h_1}, \overrightarrow{h_2}\right)$. Folosind (1.3) obținem

$$\text{(1.4)} \qquad \begin{aligned} F_{*,P}\left(\overrightarrow{h_1}\right) &= \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1}\overrightarrow{\tilde{h}_1} + \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1}\overrightarrow{\tilde{h}_2}, \\ F_{*,P}\left(\overrightarrow{h_2}\right) &= \frac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^2}\overrightarrow{\tilde{h}_1} + \frac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2}\overrightarrow{\tilde{h}_2}. \end{aligned}$$

Unei direcții tangente $du = \left(du^1, du^2\right)$ îi corespunde prin $F_{*,P}$ direcția $F_{*,P}(du) = \left(d\tilde{u}^1, d\tilde{u}^2\right)$, unde

$$\text{(1.5)} \qquad \begin{cases} d\tilde{u}^1 = \dfrac{\partial \tilde{u}^1}{\partial u^1}du^1 + \dfrac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2}du^2, \\ d\tilde{u}^2 = \dfrac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^1}du^1 + \dfrac{\partial \tilde{u}^2}{\partial u^2}du^2. \end{cases}$$

Dacă F este corespondență dată de ecuațiile (1.1'), $F_{*,P}$ se reduce la aplicația identică şi formulele (1.3) – (1.5) se simplifică în mod corespunzător.

Definiția 1.3. *Corespondența* $F : S \to \tilde{S}$ *se numeşte* ***conformă*** *dacă păstrează unghiul a oricăror două direcții tangente în fiecare punct* $P \in S$.

Teorema 1.1. *O corespondență* $F : S \to \tilde{S}$ *dată prin ecuațiile reduse (1.1') este conformă dacă şi numai dacă*

(1.6) $\tilde{g}_{ij}\left(u^1, u^2\right) = \lambda\left(u^1, u^2\right) g_{ij}\left(u^1, u^2\right)$, $\left(u^1, u^2\right) \in U$, $i, j = 1, 2$

pentru o funcție $\lambda : U \to \mathbb{R}$, strict pozitivă.

Demonstrație. Alegem parametrizarea pe S încât liniile parametrice să fie ortogonale, adică $g_{12} = 0$. Dacă F este corespondentă conformă, liniile parametrice pe $\tilde{S}$ trebuie să fie tot ortogonale, adică $\tilde{g}_{12} = 0$.

Fie două direcții $\left(du^1, du^2\right)$ şi $\left(dv^1, dv^2\right)$ oarecare, ortogonale. Cum F este corespondență conformă, imaginile acestor direcții prin $F_{*,p}$ vor fi ortogonale. Aşadar egalitățile următoare au loc simultan.

$$g_{11}du^1dv^1 + g_{22}du^2dv^2 = 0,$$
$$\tilde{g}_{11}du^1dv^1 + \tilde{g}_{22}du^2dv^2 = 0.$$

Din acestea rezultă $\frac{\tilde{g}_{11}}{g_{11}} = \frac{\tilde{g}_{22}}{g_{22}}$. Notăm cu λ valoarea comună a acestor rapoarte. Evident $\lambda > 0$ şi desigur putem scrie şi $\tilde{g}_{12} = \lambda g_{12}$. Aşadar au loc egalitățile (1.6). Reciproc, egalitățile (1.6) folosite în formula care dă cosinusul unghiului a două direcții, ne arată că *F* dată prin ecuațiile (1.1') este conformă. ■

Egalitățile (1.6) se scriu şi în forma

(1.6') $$\left\langle \frac{\partial \vec{h}_0}{\partial u^i}, \frac{\partial \vec{h}_0}{\partial u^j} \right\rangle = \lambda\left(u^1,u^2\right)\left\langle \frac{\partial \vec{h}}{\partial u^i}, \frac{\partial \vec{h}}{\partial u^j} \right\rangle, \ i,j=1,2$$

unde $h : U \to S$ şi $h_0 : U \to \tilde{S}$ sunt parametrizări în care corespondența $F : S \to \tilde{S}$ este definită prin egalitatea coordonatelor lui *P* şi $\tilde{P} = F(P)$. Fie $\tilde{h} : \tilde{U} \to \tilde{S}$ o nouă parametrizare a suprafeței $\tilde{S}$. Să presupunem că există un difeomorfism $\varphi : U \to \tilde{U}$ cu proprietatea că $h_0 = \tilde{h} \circ \varphi$. Păstrăm aplicația *F* în sensul că acum ea va asocia lui $P\left(u^1,u^2\right)$ acelaşi punct $\tilde{P}$ dar de coordonate curbilinii $\tilde{u} = \varphi(u), u = \left(u^1,u^2\right)$. Dacă *F* este corespondență conformă ea continuă să rămână conformă în această nouă reprezentare analitică iar egalitățile (1.6') devin

(1.7) $$\left\langle \frac{\partial\left(\tilde{h}\circ\varphi\right)}{\partial u^i}, \frac{\partial\left(\tilde{h}\circ\varphi\right)}{\partial u^j} \right\rangle = \lambda\left(u^1,u^2\right)\left\langle \frac{\partial h}{\partial u^i}, \frac{\partial h}{\partial u^j} \right\rangle, \ i,j=1,2$$

pentru o funcție strict pozitivă $\lambda : U \to \mathbb{R}$.

Aşadar putem întări Teorema 1.1 în forma

Teorema 1.1'. *Fie* $h : U \to S$ *şi* $\tilde{h} : \tilde{U} \to \tilde{S}$ *parametrizări de suprafețe elementare S şi* $\tilde{S}$. *O corespondență* $F : S \to \tilde{S}$ *este conformă dacă şi numai dacă există un difeomorfism* $\varphi : U \to \tilde{U}$ *încât să aibă loc egalitățile (1.7).*

Fie $h : U \to \Pi$ o parametrizare a unui plan Π iar $\tilde{h} : \tilde{U} \to S$ o parametrizare a suprafeței elementare *S*. După Teorema 1.1' o aplicație $F : \Pi \to S$ este corespondență conformă dacă şi numai dacă există un difeomorfism $\varphi : U \to \tilde{U}$ încât să aibă loc (1.7), egalități care, în acest caz particular, se scriu

(1.8) $$\left\langle \frac{\partial\left(\tilde{h}\circ\varphi\right)}{\partial u^i}, \frac{\partial\left(\tilde{h}\circ\varphi\right)}{\partial u^j} \right\rangle = \lambda\left(u^1,u^2\right)\delta_{ij}, \ i,j=1,2$$

pentru o funcție strict pozitivă $\lambda : U \to \mathbb{R}$.

Privim φ ca o schimbare de parametrii pe *S*. Egalitățile (1.8) devin

(1.8') $\qquad g_{ij}\left(u^1,u^2\right)=\lambda\left(u^1,u^2\right)\delta_{ij}$, i,j=1,2

pentru $\lambda : U \to \mathbb{R}$.

Aşadar suprafaţa simplă *S* este în corespondenţă locală conformă sau este local conformă cu un plan Π dacă admite o parametrizare în care forma I-a fundamentală a ei se scrie

(1.9) $\qquad \phi(P,du)=\lambda\left(u^1,u^2\right)\left[\left(du^1\right)^2+\left(du^2\right)^2\right].$

Definiţia 1.4. *O parametrizare a suprafeţei S în care forma I-a fundamentală are expresia (1.9) se numeşte parametrizare izotermă.*

Se poate arăta că există o infinitate de parametrizări izoterme. Aşadar orice suprafaţă este local conformă într-o infinitate de moduri cu un plan. În particular, sfera S^2 este local conformă cu un plan. Acest fapt serveşte la desenarea hărţilor plane ale unor regiuni de pe globul pământesc. În aceste hărţi se păstrează unghiurile formate de elementele corespunzătoare de pe glob.

Definiţia 1.5. *O corespondenţă* $F : S \to \widetilde{S}$ *se numeşte* ***corespondenţă izometrică*** *sau* ***izometrie*** *dacă oricare două curbe ce se corespund prin F au aceeaşi lungime.*

Teorema 1.2. *O corespondenţă* $F : S \to \widetilde{S}$ *dată prin ecuaţiile reduse (1.1') este izometrie dacă şi numai dacă*

(1.10) $\qquad \widetilde{g}_{ij}\left(u^1,u^2\right)=g_{ij}\left(u^1,u^2\right),\ \left(u^1,u^2\right)\in U,\ i,j=1,2.$

Demonstraţie. Fie o curbă *C* pe *S* de ecuaţii $\begin{cases} u^1=u^1(t) \\ u^2=u^2(t),\ t\in[0,T] \end{cases}$, curbă care pleacă din P_0 la $t = 0$. Arcul de curbă $\overset{\frown}{P_0P(t)}$ are lungimea

$$l(t)=\int_0^t\sqrt{g_{11}\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2+2g_{12}\frac{du^1}{dt}\frac{du^2}{dt}+g_{22}\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2}\,dt$$

iar arcul corespunzător lui pe $\widetilde{S}$, dacă *F* este izometrică, are aceeaşi lungime $l(t)$, cu expresia

$$l(t)=\int_0^t\sqrt{\widetilde{g}_{11}\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2+2\widetilde{g}_{12}\frac{du^1}{dt}\frac{du^2}{dt}+\widetilde{g}_{22}\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2}\,dt\ .$$

Prin derivarea funcţiei $t \to l(t)$, după o ridicare la pătrat obţinem egalitatea

$$g_{11}\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2+2g_{12}\frac{du^1}{dt}\frac{du^2}{dt}+g_{22}\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2=\widetilde{g}_{11}\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2+2\widetilde{g}_{12}\frac{du^1}{dt}\frac{du^2}{dt}+\widetilde{g}_{22}\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2,$$

care are loc pentru orice pereche $\left(\frac{du^1}{dt},\frac{du^2}{dt}\right)$. Rezultă că în mod necesar au loc egalitățile (1.10). Reciproca este imediată. ■

Similar cu Teorema 1.1' se justifică următoarea formă mai tare a Teoremei 1.2.

Teorema 1.2'. *Fie* $h:U\to S$ *şi* $\tilde{h}:\tilde{U}\to\tilde{S}$ *parametrizări de suprafețe elementare* S *şi* $\tilde{S}$. *O corespondență* $F:S\to\tilde{S}$ *este izometrie dacă şi numai dacă există un difeomorfism* $\varphi:U\to\tilde{U}$ *încât să aibă loc*

$$\left\langle \frac{\partial\left(\tilde{h}\circ\varphi\right)}{\partial u^i},\frac{\partial\left(\tilde{h}\circ\varphi\right)}{\partial u^j}\right\rangle=\left\langle\frac{\partial h}{\partial u^i},\frac{\partial h}{\partial u^j}\right\rangle,\ i,j=1,2. \tag{1.10}$$

Pe baza formulei (1.4), Teorema 1.2 se poate reformula astfel.

Teorema 1.3. *O corespondență* $F:S\to\tilde{S}$ *dată prin ecuațiile reduse (1.1') este izometrie dacă şi numai dacă aplicația tangentă este izometrie de spații vectorial euclidiene, pentru orice* $P\in S$.

Două suprafețe între care există o corespondență izometrică în sensul de mai sus se vor numi local izometrice pentru că toate considerațiile precedente au fost de natură locală. De exemplu, o suprafață S este local izometrică cu un plan dacă admite o parametrizare în care forma I-a fundamentală a ei are expresia $\phi(P,du)=\left(du^1\right)^2+\left(du^2\right)^2$.

Două suprafețe local izometrice au local aceeaşi geometrie intrinsecă.

§2. Suprafețe de curbură constantă

Fie o suprafață S de curbură constantă K_0. Dat un punct $P\in S$ şi o geodezică C care conține P, se poate introduce o parametrizare numită semigeodezică în care liniile parametrice v = constant sunt geodezice (v = 0 este C) iar liniile parametrice u = constant sunt ortogonale pe acestea. Rezultă că în această parametrizare forma I-a fundamentală se scrie

$$\phi(u,du)=du^2+G(u,v)dv^2. \tag{2.1}$$

Mai mult, parametrizarea semigeodezică se poate alege astfel ca

$$G(0,v)=1,\ \frac{\partial G}{\partial u}(0,v)=0. \tag{2.2}$$

Dacă se calculează expresia curburii totale în parametrizare semigeodezică se obține

$$K(u,v)=-\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial^2\sqrt{G}}{\partial u}. \tag{2.3}$$

Condiția $K = K_0$ se poate pune în forma

(2.4) $$\frac{\partial^2 \sqrt{G}}{\partial u} + K_0 \sqrt{G} = 0,$$

pe care o privim ca ecuație diferențială de ordin 2 cu coeficienți constanți în necunoscuta $\sqrt{G}$ funcție de *u*, cu *v* ca parametru.

Distingem trei cazuri.

1. $K_0 = 0$. Soluția generală a ecuației diferențiale (2.4) este $\sqrt{G} = c_1(v)u + c_2(v)$.

Pentru $u = 0$, obținem $c_2(v) = 1$ pentru că $\left(\sqrt{G}\right)(0,v) = 1$. Prin derivare în raport cu *u* a soluției generale, obținem $c_1(v) = \frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}$. Dar după (2.2), $\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u}(0,v) = 0$. Rezultă $c_1(v) = 0$. Aşadar în condițiile inițiale (2.3), ecuația diferențială (2.4) are soluția $\sqrt{G} = 1$. Rezultă că în parametrizarea geodezică folosită, forma I-a fundamentală a suprafeței *S* este $\phi = (du)^2 + (dv)^2$. Conchidem că *S* este local izometrică cu un plan. Acesta este un motiv pentru care suprafețele cu $K = 0$ se numesc şi local plane sau local plate.

2. $K_0 = \frac{1}{R^2} > 0$. Soluția generală a ecuației diferențiale (2.4) este

$$\sqrt{G} = c_1(v)\cos\frac{u}{R} + c_2(v)\sin\frac{u}{R}.$$

Condițiile inițiale (2.2) conduc la $c_1(v) = 1$ şi $c_2(v) = 0$. Rezultă că în acest caz forma I-a fundamentală a suprafeței *S* se scrie astfel

(2.5) $$\phi = du^2 + \left(\cos^2\frac{u}{R}\right)dv^2.$$

Se ştie că forma I-a fundamentală a unei sfere de rază *R* în reprezentarea dată de meridiane şi paralele are exact forma (2.5). Teorema 1.2' din §1 ne spune că suprafețele *S* de curbură constantă pozitivă $\frac{1}{R^2}$ sunt local izometrice cu sfera de rază *R*. Deci sfera este, în sensul descris, un model standard pentru suprafețele de curbură constantă pozitivă.

3. $K_0 = -\frac{1}{R^2} < 0$. Soluția generală a ecuației diferențiale (2.4) este

$$\sqrt{G} = c_1(v)ch\frac{u}{R} + c_2(v)sh\frac{u}{R}.$$

Condițiile inițiale (2.2) ne dau $c_1(v)$ = 1 şi $c_2(v)$ = 0. Ca atare, forma I-a fundamentală a suprafeței este în acest caz

$$\phi = du^2 + \left(ch^2\frac{u}{R}\right)dv^2. \tag{2.6}$$

Există şi aici o suprafață care serveşte ca model standard pentru toate suprafețele de curbură negativă constantă. Aceasta se numeşte pseudosferă şi se poate da prin ecuațiile

$$\begin{cases} x = a(u)\cos v, \\ y = a(u)\sin v, \\ z = b(u), \end{cases} \tag{2.7}$$

unde $a(u) = ch\frac{u}{R}$ şi $b(u) = \int_0^u \sqrt{1 - \frac{1}{R^2}sh^2\frac{t}{R}}\,dt$. Rezultă

$$g_{11} = a'^2(u) + b'^2(u) = \frac{1}{R^2}sh^2\frac{u}{R} + 1 - \frac{1}{R^2}sh^2\frac{t}{R} = 1,$$

$g_{12} = 0$ şi $g_{22} = ch^2\frac{u}{R}$.

Deci forma I-a fundamentală a pseudosferei în parametrizarea (2.7) (care este semigeodezică) coincide cu (2.6). Curbura totală a pseudosferei, calculată după formula (2.3), este $-\frac{1}{R^2}$. Aşadar orice suprafață de curbură constantă negativă este local izometrică cu o pseudosferă.

În concluzie, putem spune că, prin cele trei cazuri analizate, suprafețele de curbură totală constantă sunt local complet clasificate. Cele de curbură totală zero au local geometria intrinsecă a unui plan, cele de curbură totală constantă pozitivă pe a unei sfere, iar cele de curbură constantă negativă pe cea a unei pseudosfere.

§3. Suprafețe de rotație şi suprafețe elicoidale

Intuitiv, o curbă care se deplasează în spațiu descrie o suprafață. Considerăm deplasarea particulară care constă din rotirea unei curbe în jurul unei drepte. Suprafața astfel obținută se numeşte suprafață de rotație. Punctele curbei vor descrie cercuri cu centrele pe dreaptă, situate în plane perpendiculare pe dreaptă, numită axă de rotație. Aceste cercuri se numesc paralele ale suprafeței de rotație.

Planele prin axa de rotație vor intersecta suprafața de rotație după curbe numite meridiane ale suprafeței de rotație. Paralelele şi meridianele formează o rețea şi ca atare pot fi folosite pentru parametrizarea suprafeței. Este clar că suprafața de rotație poate fi gândită ca suprafața obținută prin rotirea unui meridian în jurul axei de rotație.

Alegem un reper *Oxyz* în E^3 încât axa *Oz* să coincidă cu axa de rotație și considerăm meridianul din planul *xOz*. Această curbă are o reprezentare parametrică de forma

(3.1) $$x = \varphi(u), y = 0, z = \psi(u)$$

cu $\varphi'^2(u) + \psi'^2(u) > 0$ pentru $u \in (a,b)$.

Un punct oarecare al suprafeței obținută prin rotirea curbei de ecuații (3.1) în jurul axei *Oz* are coordonatele $M(\varphi(u)\cos v, \varphi(u)\sin v, \psi(u))$, unde $v \in (0, 2\pi)$ este unghiul rotației care duce punctul $M_0(\varphi(u), 0, \psi(u))$ de pe meridian în punctul *M*, cf. Fig. 26.

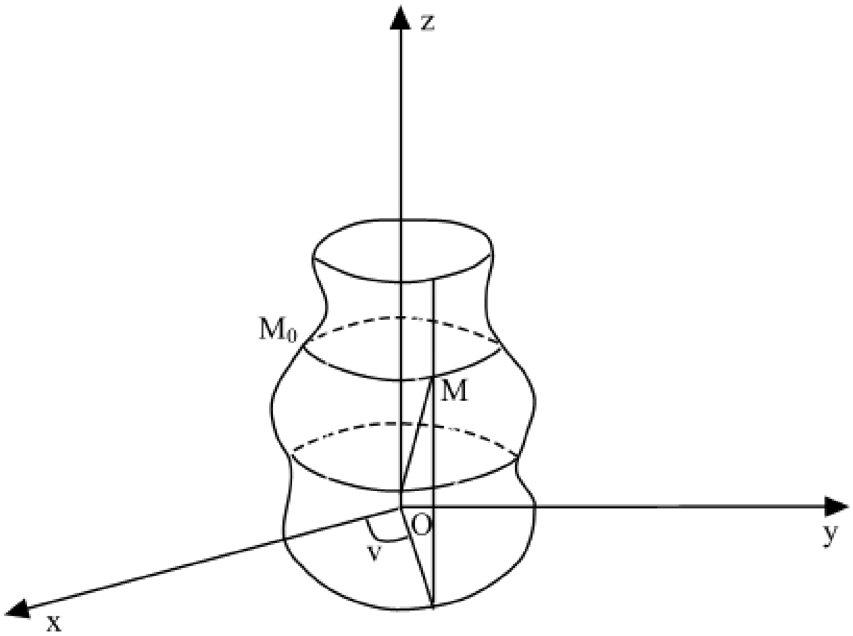

Fig. 26

În particular, curba meridian poate avea reprezentarea explicită cu, de exemplu, $\varphi(u) = u$, $u \geq 0$ și atunci coordonatele lui *M* sunt $(u\cos v, u\sin v, \psi(u)), u \geq 0$.

Aceste considerații sugerează

Definiția 3.1. *Se numește* ***suprafață de rotație*** *o suprafață care admite o reprezentare de forma*

$$(3.2)\qquad \begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = \psi(u),\ u > 0, v \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Am impus condiția $u > 0$ pentru a ne asigura că (3.2) este o suprafață în sensul considerat în Cap. 3.

Într-adevăr, avem

$$(3.3)\qquad \overrightarrow{h_1} = (\cos v, \sin v, \psi'(u)), \overrightarrow{h_2} = (-u\sin v, u\cos v, 0)$$

şi $\left|\overrightarrow{h_1} \times \overrightarrow{h_2}\right| = u^2\left(1+\psi'^2\right) \neq 0$ dacă şi numai dacă $u \neq 0$.

Geometric, inegalitatea $u \neq 0$ revine la condiția că axa de rotație nu intersectează meridianele suprafeței de rotație.

Vectorul normal unitar este

$$(3.4)\qquad \overrightarrow{N}(u,v) = \left(-\frac{\psi'}{\sqrt{1+\psi'^2}}\cos v, -\frac{\psi'}{\sqrt{1+\psi'^2}}\sin v, \frac{1}{\sqrt{1+\psi'^2}}\right).$$

Ecuația planului tangent este

$$(3.5)\qquad x\psi'\cos v + y\psi'\sin v - z + \psi - \psi' = 0.$$

Ecuațiile normalei la suprafața de rotație sunt

$$(3.6)\qquad \begin{aligned} x &= u\cos v + \lambda\psi'\cos v \\ y &= u\sin v + \lambda\psi'\sin v \\ z &= \psi(u) - \lambda,\ \lambda \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Are loc

Propoziția 3.1. *Normala la suprafața de rotație S într-un punct P coincide cu normala principală a curbei meridian prin P.*

Demonstrație. Curba meridian prin $P(u, v_0)$ are ecuația $v = v_0$ şi privită ca o curbă în spațiu are ecuațiile (3.2) cu $v = v_0$. Un calcul direct arată că normala ei principală în P are direcția dată de $(\psi'\cos v_0, \psi'\sin v_0, -1)$, unde ψ' este calculat pentru $v = v_0$.

Se poate raționa şi astfel. Curba meridian este plană. Ea se află în planul determinat de P şi Oz, plan osculator al ei. Normala principală prin P este unica dreaptă perpendiculară pe tangenta în P la curba meridian şi conținută în planul osculator (P, Oz). Pe de altă parte, normala la S în P, de ecuații (3.6), trece prin P, este perpendiculară pe tangenta la meridian în P şi este conținută în planul (P,Oz) pentru că direcția ei dată de $(\psi'\cos v, \psi'\sin v, -1)$ este perpendiculară pe direcția normală la acest plan dată de $(\sin v, -\cos v, 0)$. Deci ea coincide cu normala principală a curbei meridian. ∎

Coeficienții primei forme fundamentale sunt

(3.7) $E = 1 + \psi'^2,\ F = 0,\ G = u^2.$

Coeficienții celei de-a doua forme fundamentale sunt

(3.8) $$L = \frac{\psi''}{\sqrt{1+\psi'^2}},\ M = 0,\ N = \frac{u\psi'}{\sqrt{1+\psi'^2}}.$$

Meridianele şi paralelele formează rețeaua liniilor parametrice. Cum $F = 0$ şi $M = 0$ aceasta coincide cu rețeaua liniilor de curbură ale suprafeței. Deci

Propoziția 3.2. *Liniile de curbură ale unei suprafețe de rotație sunt meridianele şi paralelele ei.*

Liniile asimptotice sunt date de soluțiile ecuației diferențiale

(3.9) $$\psi''(du)^2 + u\psi'(dv)^2 = 0.$$

Rezultă $\frac{dv}{du} = \pm\sqrt{-\frac{\psi''}{u\psi'}}$ şi $v = c \pm \int\sqrt{-\frac{\psi''}{u\psi'}}du$, unde c este o constantă de integrare.

Curbura totală este dată de

(3.10) $$K = \frac{\psi'\psi''}{u\left(1+\psi'^2\right)^2}.$$

Curbura medie H are expresia

(3.11) $$H = \frac{1}{\sqrt{1+\psi'^2}}\left[\frac{\psi'}{u} + \frac{\psi''}{1+\psi'^2}\right].$$

Dacă vom considera pe meridianul generator un punct de inflexie P_0, vom avea $\psi''(u) = 0$ în toate punctele cercului paralel descris de P_0 şi deci în aceste puncte $K = 0$.

Aşadar are loc

Propoziția 3.3. *Curba paralel generată de un punct de inflexie de pe meridianul generator este formată din puncte parabolice ale suprafeței.*

În demonstrația Propoziției 3.2 am notat că normalele unei suprafețe de rotație în punctele unui meridian sunt conținute în planul osculator al curbei meridian. După Propoziția 3.3 din Cap. 4 rezultă

Propoziția 3.4. *Curbele meridian ale unei suprafețe de rotație sunt geodezice.*

Ştim că prin fiecare punct al unei suprafețe trec o infinitate de geodezice, câte una în fiecare direcție în acel punct. Aşadar meridianele nu sunt singurele geodezice ale unei suprafețe de rotație.

Pentru a determina şi alte geodezice trebuie să folosim ecuațiile diferențiale (3.2) din Cap. 4 ale geodezicilor unei suprafețe.

În cazul de față avem $g_{11}=1+\psi^{2}, g_{12}=g_{21}=0, g_{22}=u^{2}$ şi $g^{11}=\dfrac{1}{1+\psi'^{2}}$, $g^{12}=g^{21}=0, g^{22}=\dfrac{1}{u^{2}}$, coeficienții Christoffel sunt dați de

$$\begin{aligned}&\Gamma_{11}^{1}=\frac{\psi'\psi''}{1+\psi'^{2}},\ \Gamma_{12}^{1}=0,\ \Gamma_{22}^{1}=-\frac{u}{1+\psi'^{2}}\\ &\Gamma_{11}^{2}=0,\ \Gamma_{12}^{2}=\frac{1}{u},\ \Gamma_{22}^{2}=0\end{aligned}\tag{3.12}$$

iar ecuațiile diferențiale ale geodezicilor sunt

$$\begin{cases}\dfrac{d^{2}u}{ds^{2}}+\dfrac{\psi'\psi''}{1+\psi'^{2}}\left(\dfrac{du}{ds}\right)^{2}-\dfrac{u}{1+\psi'^{2}}\dfrac{dv}{ds}=0\\ \dfrac{d^{2}v}{ds^{2}}+\dfrac{2}{u}\dfrac{du}{ds}\dfrac{dv}{ds}=0,\end{cases}\tag{3.13}$$

unde ψ',ψ'' sunt calculate în $u(s)$.

Ştim că meridianele $v = v_0$ sunt geodezice. Ecuația a doua din (3.13) este identic verificată dar prima se reduce la $\dfrac{du^{2}}{ds^{2}}+\dfrac{\psi'\psi''}{1+\psi'^{2}}\left(\dfrac{du}{ds}\right)^{2}=0$, ecuație care permite să calculăm legătura între parametrii u şi s (lungime de arc) pe meridiane.

Ecuația a doua din (3.13) are o consecință interesantă.

Propoziția 3.5 (Clairaut). *Fie α mărimea unghiului dintre o linie geodezică şi o curbă paralel într-un punct P. Atunci produsul $u\cos\alpha$ este constant pe geodezică.*

Demonstrație. Fie $\left(\dfrac{du}{ds},\dfrac{dv}{ds}\right)$ direcția geodezicii. Direcția curbei paralel este $(0,dv)$ iar formula de calcul pentru $\cos\alpha$ dă, în acest caz, având în vedere că vectorul tangent geodezicii are lungimea 1, $\cos\alpha=\sqrt{G}\dfrac{dv}{ds}=u\dfrac{dv}{ds}$ şi deci $u\cos\alpha=u^{2}\dfrac{dv}{ds}$. Rezultă $\dfrac{d}{ds}(u\cos\alpha)=u^{2}\dfrac{d^{2}v}{ds^{2}}+2u\dfrac{du}{ds}\dfrac{dv}{ds}=u^{2}\left(\dfrac{d^{2}v}{ds^{2}}+\dfrac{2}{u}\dfrac{du}{ds}\dfrac{dv}{ds}\right)=0$. Deci $u\cos\alpha=$constant pe geodezică. ■

O mişcare puțin mai complicată a unei curbe în spațiu este una care constă în rotirea curbei în jurul unei drepte şi simultan translatarea ei în lungul aceleaşi drepte cu o lungime proporțională cu unghiul de rotație. Dacă luăm curba generatoare de ecuații

$$x=u, y=0, z=\psi(u),\ u>0\tag{3.14}$$

şi ca axă de rotație *Oz*, ecuațiile suprafeței obținute prin mişcarea descrisă, numită mişcare elicoidală, sunt

$$(3.15)\qquad \begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = \psi(u) + av,\ u > 0, a \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Suprafața reprezentată prin (3.15) se numeşte **suprafață elicoidală**. Recomandăm cititorului să calculeze elementele geometrice ale acestei suprafețe.

§4. Suprafețe riglate şi suprafețe desfăşurabile

Fie în E^3 raportat la reperul $\mathcal{R} \equiv Oxyz$ o curbă C de ecuație

$$\vec{r} = \vec{a}(u),\ u \in I \subseteq \mathbb{R},\ \vec{a}\,'(u) \neq \vec{0} \text{ pe } I.$$

Considerăm prin punctul ei $A(u_0)$ o dreaptă de vector director $\vec{b}$ care se poate lua de lungime 1. Să presupunem că $\vec{b}$ depinde diferențiabil de *u*, adică avem $\vec{b}(u)$ cu $\vec{b}^{\,2}(u) = 1$. Când *u* parcurge *I*, dreapta dată inițial în *A* variază şi descrie, intuitiv vorbind, o suprafață în E^3, cf. Fig. 27.

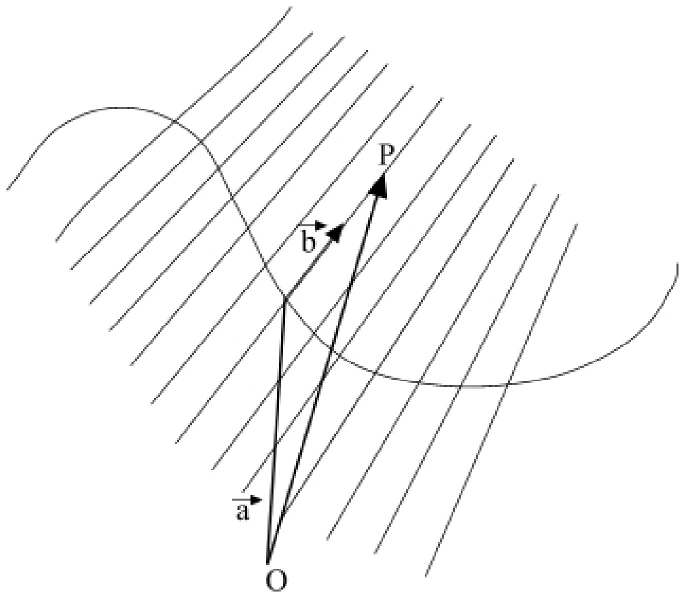

Fig. 27

Un punct P de pe această suprafață are vectorul de poziție $\vec{a}(u)+v\vec{b}(u)$ cu $v\in\mathbb{R}$. Aceste considerații sugerează

Definiția 4.1. *Se numeşte* ***suprafață riglată*** *(sau simplu riglată) suprafața care admite o reprezentare parametrică de forma*

(4.1) $$\vec{r}=\vec{a}(u)+v\vec{b}(u),\ \vec{b}^2(u)=1,\ u\in I, v\in\mathbb{R}.$$

Avem: $\vec{r}_u=\vec{a}\,'(u)+v\vec{b}\,'(u),\ \vec{r}_v=\vec{b}(u)$.

Pentru ca suprafața riglată (4.1) să fie suprafață în sensul dat în Cap. 3 trebuie să limităm (u,v) la un domeniu din $\mathbb{R}^2$ în care

(4.2) $$\left[\vec{a}\,'(u)+v\vec{b}\,'(u)\right]\times\vec{b}(u)\neq\vec{0}.$$

În continuare vom considera şi studia suprafețele riglate de ecuație (4.1) care satisfac condiția (4.2). Curbele u = constant sunt drepte. Ele se numesc generatoarele suprafeței. Curba C se numeşte **curba directoare** a suprafeței riglate.

Ecuația planului tangent la suprafața riglată (4.1) este

(4.3) $$\left(\vec{r}-\vec{a}(u)-v\vec{b}(u),\vec{a}\,'(u)-v\vec{b}\,'(u),\vec{b}(u)\right)=0 \text{ (produs mixt).}$$

Propoziția 4.1. *Planul tangent la riglată într-un punct conține generatoarea prin acel punct.*

Demonstrație. Generatoarea prin $P(u,v)$ are direcția $\vec{b}(u)$. Direcția normală planului tangent este dată de vectorul $\vec{n}(u,v)=\left[\vec{a}\,'(u)+v\vec{b}\,'(u)\right]\times\vec{b}(u)$. Vectorul $\vec{n}(u,v)$ este perpendicular pe $\vec{b}(u)$ oricare ar fi v. Deci planul tangent prin $P(u,v)$ conține generatoarea prin acest punct. ∎

După Propoziția 4.1 planele tangente la riglată în punctele unei generatoare formează un fascicol de plane care are generatoarea ca dreaptă de bază.

Ne punem problema de a găsi condiții în care acest fascicol se reduce la un plan. Pentru aceasta este necesar şi suficient ca vectorul $\vec{n}(u_0,v)$ să aibă direcție fixă când variază v. Dar aceasta se întâmplă dacă şi numai dacă

(4.4) $$\vec{n}(u_0,v)\times\frac{d\vec{n}}{dv}(u_0,v)=\vec{0}.$$

După un calcul fără dificultăți, în care se foloseşte formula dublului produs vectorial, se obține că egalitatea (4.4) este echivalentă cu

(4.5) $$\left(\vec{a}\,'(u),\vec{b}(u),\vec{b}\,'(u)\right)=0 \text{ (produs mixt).}$$

Definiția 4.2. *O suprafață riglată cu proprietatea că planul ei tangent este fix când punctul de contact cu suprafața descrie o generatoare arbitrară se numeşte* ***suprafață desfăşurabilă****.*

Considerațiile ce preced această definiție justifică

Propoziția 4.2. *O suprafață riglată de ecuație (4.1) este desfăşurabilă dacă şi numai dacă are loc (4.5).*

Condiția (4.5) ne permite să identificăm toate suprafețele desfăşurabile. Începem prin a nota că (4.5) are loc dacă $\vec{b}'(u) = \overline{0}$ adică $\vec{b}$ este un versor constant (nu depinde de *u*). În acest caz generatoarele sunt paralele între ele.

Definiția 4.3. *Se numeşte* ***suprafață cilindrică*** *(generală) suprafața riglată cu generatoarele paralele între ele.*

Aşadar suprafețele cilindrice sunt riglate desfăşurabile. Condiția (4.5) este satisfăcută şi atunci când $\vec{b} \times \vec{b}' = \vec{0}$, condiție care ne spune că vectorul $\vec{b}(u)$ are direcție fixă. Geometric aceasta înseamnă că generatoarele suprafeței riglate sunt paralele între ele deci suprafața este cilindrică.

Presupunem $\vec{b}(u) \times \vec{b}'(u) \neq \vec{0}$. Condiția (4.5) are loc dacă

(4.6) $$\vec{a}'(u) = \alpha(u)\vec{b}(u) + \beta(u)\vec{b}'(u),$$

cu funcțiile α şi β unic determinate, fără a fi simultan nule.

Dacă $\beta(u) = 0$, din (4.6) rezultă că $\vec{b}(u)$ este coliniar cu $\vec{a}'(u)$, cu alte cuvinte generatoarele riglatei sunt tangente la curba directoare *C*. Apare ideea că printre riglatele desfăşurabile sunt cele care au generatoarele tangente la o curbă nu neapărat curba directoare. Observăm că ecuația

(4.7) $$\vec{r} = \vec{a}(u) + v(u)\vec{b}(u), \ \vec{b}^2(u) = 1$$

reprezintă o curbă pe riglata (4.1) care intersectează toate generatoarele suprafeței.

Avem: $\vec{r}' = \vec{a}'(u) + v'(u)\vec{b}(u) + v(u)\vec{b}'(u)$.

Condiția ca generatoarele suprafeței să fie tangente la curba (4.7) este să existe o funcție $u \to \lambda(u)$ încât

(4.8) $$\vec{a}'(u) + v'(u)\vec{b}(u) + v(u)\vec{b}'(u) = \lambda(u)\vec{b}(u).$$

Să presupunem că are loc (4.6), adică riglata este desfăşurabilă. Înlocuim $\vec{a}'(u)$ din (4.6) în (4.8). Obținem o combinație liniară de vectori $\vec{b}$ şi $\vec{b}'$ care sunt liniar independenți, deci coeficienții combinației liniare trebuie să fie nuli, adică

(4.9) $$\alpha + v' - \lambda = 0, \ \beta + v = 0.$$

Rezultă $v' = -\beta'$ şi

(4.10) $$\lambda = \alpha - \beta'.$$

Aşadar dacă riglata este desfăşurabilă, adică (4.5) are loc în virtutea presupunerii (4.6), generatoarele riglatei sunt tangente la curba de ecuație (4.7).

Dacă se întâmplă că λ determinat prin (4.10) este zero, atunci curba (4.7) degenerează la un punct prin care trec toate generatoarele.

Definiția 4.4. *Suprafața riglată ale cărei generatoare trec printr-un punct fix se numeşte suprafață conică (con generalizat).*

Am arătat astfel că singurele suprafețe riglate desfăşurabile sunt:
- planele,
- suprafețele cilindrice,
- suprafețele conice,
- suprafețele riglate ale căror generatoare sunt tangente la o curbă numită muchie cuspidală.

Observație. Am considerat separat suprafețele plane dar ele sunt evident cazuri particulare ale celorlalte trei categorii de suprafețe desfăşurabile.

Fie din nou suprafața riglată de ecuații (4.1) cu condițiile (4.2). Coeficienții primei forme fundamentale sunt

$$E = \vec{a}'^2(u) + 2v\left\langle \vec{a}'(u), \vec{b}'(u) \right\rangle + v^2, F = \left\langle \vec{a}'(u), \vec{b}(u) \right\rangle, G = 1, \tag{4.11}$$

pentru că $\vec{b}^2(u) = 1$.

Generatoarele suprafeței ca drepte vor fi asimptote. Cum ele formează o familie (prin fiecare punct al suprafeței trece o generatoare şi numai una), urmează că ele constituie una din cele două posibile familii de asimptote ale suprafeței. Generatoarele sunt de ecuații u = constant, adică $du = 0$. Dar pentru ca direcțiile $(0, dv)$ să verifice ecuația liniilor asimptotice trebuie ca în mod necesar să avem $N = 0$. Faptul se confirmă şi prin calcul direct pentru că avem $\vec{r}_{vu} = \vec{a}''(u) + v\vec{b}''(u), \vec{r}_{uv} = \vec{b}'(u), \vec{r}_{vv} = 0$.

Aşadar coeficienții celei de a doua formă fundamentală sunt

$$L = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(\vec{a}'(u) + v\vec{b}'(u), \vec{b}(u), \vec{a}''(u) + v\vec{b}''(u)\right),$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(\vec{a}'(u) + v\vec{b}'(u), \vec{b}(u), \vec{b}'(u)\right) = \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left(\vec{a}'(u), \vec{b}(u), \vec{b}'(u)\right), \tag{4.12}$$

$$N = 0,$$

unde $\Delta = E - F^2$.

Curbura totală este dată de formula

$$K = \frac{-M^2}{E - F^2}. \tag{4.13}$$

Cum $E - F^2 > 0$ şi M este dat de (4.12), având în vedere (4.5), rezultă

Propoziția 4.3. *Pe o suprafață riglată curbura totală $K(u,v) \le 0$. Ea este egală cu zero dacă suprafața este desfăşurabilă. Punctele unei suprafețe riglate sunt hiperbolice sau parabolice şi sunt numai parabolice dacă suprafața este desfăşurabilă.*

Întărim Propoziția 4.3 prin

Teorema 4.1. *O suprafață fără puncte planare are curbura totală $K = 0$ dacă şi numai dacă este riglată desfăşurabilă.*

Demonstrație. După Propoziția 4.3 pentru orice riglată desfăşurabilă avem $K=0$. Reciproc, fie o suprafaţă cu proprietatea $K=0$. Alegem o parametrizare încât liniile u = constant să fie asimptote. În această parametrizare avem $N = 0$ şi din $LN-M^2=0$ rezultă că $M = 0$. Prin ipoteză $L \neq 0$. Aşadar avem $\left\langle \overrightarrow{N}, \overrightarrow{r_{vv}} \right\rangle = 0$ şi $\left\langle \overrightarrow{N}, \overrightarrow{r_{uv}} \right\rangle = 0$. Prin derivare parţială a egalităţilor $\left\langle \overrightarrow{N}, \overrightarrow{r_u} \right\rangle = 0$ şi $\left\langle \overrightarrow{N}, \overrightarrow{r_v} \right\rangle = 0$ obţinem $\left\langle \overrightarrow{N_v}, \overrightarrow{r_u} \right\rangle = 0$, $\left\langle \overrightarrow{N_u}, \overrightarrow{r_v} \right\rangle = 0$ şi $\left\langle \overrightarrow{N_v}, \overrightarrow{r_v} \right\rangle = 0$. Cum $\overrightarrow{N_v}$ este perpendicular şi pe $\overrightarrow{N}$, în mod necesar $\overrightarrow{N_v} = \vec{0}$, deci $\overrightarrow{N}$ depinde numai de u, adică $\overrightarrow{N}(u,v) = \overrightarrow{N}(u)$.

Din $\left\langle \overrightarrow{r_v}, \overrightarrow{N} \right\rangle = 0$ şi $\left\langle \overrightarrow{r_v}, \overrightarrow{N_u} \right\rangle = 0$ rezultă că $\overrightarrow{r_v}$ este coliniar cu $\overrightarrow{N} \times \overrightarrow{N_u}$ adică $\overrightarrow{r_v} = f(u,v)\left(\overrightarrow{N} \times \overrightarrow{N_u}\right)$ pentru o funcţie $f : D \subseteq R^2 \to R$.

Prin integrare în raport cu v obţinem

(4.14) $$\vec{r}(u,v) = \vec{a}(u) + V\vec{b}(u),$$

cu $\vec{b}(u) = \dfrac{\overrightarrow{N} \times \overrightarrow{N_u}}{\left\| \overrightarrow{N} \times \overrightarrow{N_u} \right\|}$ şi $V = \left(\int f(u,v)\,dv \right) \left\| \overrightarrow{N} \times \overrightarrow{N_u} \right\|$.

Aşadar S admite o parametrizare de tipul (4.1). Curbele u = constant (asimptote) sunt evident drepte şi constituie o familie de generatoare. Deci S este suprafaţă riglată. Pe o generatoare oarecare $u = u_0$ avem $\overrightarrow{N}(u_0,v) = \overrightarrow{N}(u_0) =$ constant deci planul tangent în punctele generatoarei este fix. Aşadar riglata S este desfăşurabilă. ■

Observație. Ipoteza că S nu are puncte planare, din Teorema 4.1, este esenţială. Există suprafeţe cu $K=0$ care nu sunt riglate. Un exemplu este dat la p. 90-91 în [10].

§5. Suprafețe minimale

Problemă. Dată o curbă închisă C în spaţiu să se determine suprafaţa care are ca frontieră curba C şi arie minimă (Fig. 28). Sau să se găsească condiţii geometrice pe care o asemenea suprafaţă trebuie să le satisfacă.

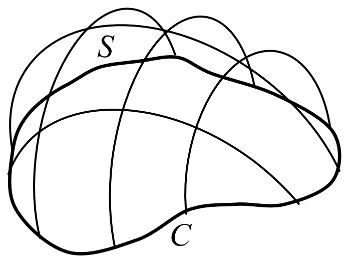

Fig. 28

Pentru a găsi o condiție geometrică pe care trebuie să o satisfacă o suprafață care trece prin C şi are arie minimă, fie o suprafață elementară de ecuație

(5.1) $\vec{r}=\vec{h}\left(u^1,u^2\right)$, $\left(u^1,u^2\right)\in A$ mulțime compactă în $\mathbb{R}^2$, $\overrightarrow{h_1}\times\overrightarrow{h_2}\neq\vec{0}$ pe A.

Imaginea prin h a frontierei ∂A este curba frontieră C.

Considerăm o variație a acestei suprafețe în direcție normală numită şi variație normală, adică o familie de suprafețe reprezentate prin

(5.2) $$\vec{r}=\overrightarrow{h_\varepsilon}\left(u^1,u^2\right):=\vec{h}\left(u^1,u^2\right)+\varepsilon\varphi\left(u^1,u^2\right)\overrightarrow{N}\left(u^1,u^2\right),$$

unde φ este o funcție reală de clasă C^2 care se anulează pe frontiera ∂A (sau pe C). Aceste suprafețe au aceeaşi frontieră şi la $\varepsilon=0$ se obține suprafața inițială. Pentru $|\varepsilon|$ suficient de mic, $\overrightarrow{h_\varepsilon}$ reprezintă într-adevăr o suprafață pentru că avem formulele:

$$\frac{\partial\overrightarrow{h_\varepsilon}}{\partial u^1}=\overrightarrow{h_1}+\varepsilon\varphi_{,1}\overrightarrow{N}+\varepsilon\varphi\overrightarrow{N_1},$$
$$\frac{\partial\overrightarrow{h_\varepsilon}}{\partial u^2}=\overrightarrow{h_2}+\varepsilon\varphi_{,2}\overrightarrow{N}+\varepsilon\varphi\overrightarrow{N_2},$$

care ne dau coeficienții formei I-a fundamentale

$$g_{ij}^{\varepsilon}=\left\langle\frac{\partial\overrightarrow{h_\varepsilon}}{\partial u^i},\frac{\partial\overrightarrow{h_\varepsilon}}{\partial u^j}\right\rangle=g_{ij}+\varepsilon\varphi\left\langle\overrightarrow{h_1},\overrightarrow{N_2}\right\rangle+\varepsilon^2\varphi_{,1}\varphi_{,2}+$$
$$+\varepsilon\varphi\left\langle\overrightarrow{N_1},\overrightarrow{h_2}\right\rangle+\varepsilon^2\varphi^2\left\langle\overrightarrow{N_1},\overrightarrow{h_2}\right\rangle=g_{ij}-2\varepsilon\varphi b_{ij}+O\left(\varepsilon^2\right),$$

după calcule şi prin folosirea formulelor lui Weingarten.

Continuăm calculele şi obținem:

(5.3) $$\begin{aligned}\Delta^{\varepsilon}&=g_{11}^{\varepsilon}g_{22}^{\varepsilon}-\left(g_{12}^{\varepsilon}\right)^2=\Delta-2\varepsilon\varphi\left(g_{11}h_{22}-2g_{12}h_{12}+g_{22}h_{11}\right)\\&+O\left(\varepsilon^2\right)=\Delta-4\varepsilon\varphi\Delta H+O\left(\varepsilon^2\right)=\Delta\left(1-4\varepsilon\varphi H\right)+O\left(\varepsilon^2\right),\end{aligned}$$

unde H este curbura medie a suprafeței.

Rezultă că pentru $|\varepsilon|$ mic, $\Delta^{\varepsilon} > 0$ cu φ arbitrar.

Fie $\sigma(\varepsilon) = \iint\limits_{A} \sqrt{\Delta^{\varepsilon}}\, du^1 du^2$ aria suprafeței dată de $\overrightarrow{h_{\varepsilon}}$. Pentru ca suprafața dată de $\vec{h} := \overrightarrow{h_0}$ să fie de arie minimă, o condiție necesară este ca să aibă loc

$$\text{(5.4)} \qquad \left.\frac{d\sigma(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = 0 \text{ (teorema lui Fermat).}$$

Evaluăm $\left.\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0}$. Avem:

$$\left.\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} = \iint\limits_{A} \left.\frac{d\sqrt{\Delta^{\varepsilon}}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} du^1 du^2 = \iint\limits_{A} \frac{1}{2\sqrt{\Delta}} \left.\frac{d\sqrt{\Delta^{\varepsilon}}}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} du^1 du^2 \overset{(5.3)}{=} -2\iint\limits_{A} \varphi H \sqrt{\Delta}\, du^1 du^2 .$$

Impunem condiția (5.4), alegem $\varphi = H$ şi obținem, $\iint\limits_{A} H^2 \sqrt{\Delta}\, du^1 du^2 = 0$, relație care are loc dacă şi numai dacă $H = 0$. Aşadar are loc

Teorema 5.1. *O condiție necesară ca aria suprafeței (5.1) să fie mai mică sau egală cu ariile suprafețelor* $\overrightarrow{h_{\varepsilon}}$ *date de orice variație normală (5.2) cu* $\left.\overrightarrow{h_{\varepsilon}}\right|_{\partial A} = \left.\vec{h}\right|_{\partial A}$ *este anularea curburii medii H a suprafeței (5.1) pe* $A \setminus \partial A$.

Definiția 5.1. *Suprafețele pentru care curbura medie* $H = 0$ *se numesc suprafețe minimale.*

Observație. Condiția $H = 0$ ne spune că suprafața $\vec{h}$ dată de (5.1) este "punct staționar" între suprafețele $\overrightarrow{h_{\varepsilon}}$. Se poate arăta că suprafețele cu $H = 0$ minimizează aria doar local. Dar Definiția 5.1 se foloseşte în forma generală, dată mai sus.

CAPITOLUL 6

Curbe: Probleme

6.1 Enunţuri

6.1 Folosind formula lungimii de arc şi ecuaţiile parametrice ale unei drepte în spaţiu să se obţină formula distanţei dintre două puncte din spaţiu.

6.2 Folosind formula lungimii de arc şi ecuaţiile parametrice ale cercului centrat în origine de rază R să se obţină expresia lungimii cercului.

6.3 Se cere lungimea pe $[0, 2\pi]$ a *cicloidei*: $\overline{r} : I\!R \to I\!R^2$, $\overline{r}(t) = R(t - \sin t, 1 - \cos t)$, unde $R > 0$ este o constantă data.

6.4 Se cere lungimea arcului de curbă $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ pentru *astroidă*: $\overline{r} : I\!R \to I\!R^2, \overline{r}(t) = R\left(\cos^3 t, \sin^3 t\right)$.

6.5 Pentru *spirala logaritmică*: $\overline{r} : I\!R \to I\!R^2$,

$\overline{r}(t) = R\left(e^{kt} \cos t, e^{kt} \sin t\right)$, $R, k > 0$ constante, se cer:

(i) să se arate că unghiul dintre $\overline{r}(t)$ şi $\overline{r}'(t)$ este constant,

(ii) dacă notăm l_n lungimea arcului de curbă $(2n\pi, 2(n+1)\pi)$ să se arate că raportul $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ este constant.

Aceste proprietăţi caracterizează spirala logaritmică iar ultima proprietate arată că spirala logaritmică este un exemplu de fractal!

6.6 Fie funcţia $f : I = (a, b) \to I\!R$ de clasa $C^k, k \geq 1$ şi curba grafic: $\overline{r} : I \to I\!R^2, \overline{r}(t) = (t, f(t))$. Să se obţină formula lungimii curbei grafic $L(f) = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2} dt$. Această formulă apare în Manualul de Analiză Matematică, clasa a XII-a.

6.7 Pentru curba $\overline{r}(t) = e^t (\sin t, \cos t, 1)$ să se arate că tangenta, normala principala şi binormala formează fiecare un unghi constant cu axa Oz.

6.8 Se cer punctele curbei $\overline{r}(t) = \left(2t-1, t^3, 1-t^2\right)$ în care planul osculator este perpendicular pe planul $\pi : 7x - 12y + 5z = 0$.

6.9 Se cer curbele $\overline{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ pentru care tangenta este paralelă cu vectorul $(y(t)z(t), z(t)(x(t)-1), y(t)(x(t)-1))$.

6.10 Să se arate că tangentele la curba $\overline{r}(t) = \left(a\cos t, -a\sin t, be^t\right)$ intersectează planul xOy după un cerc.

6.11 Se cer punctele curbei $\overline{r}(t) = \left(\frac{1}{t}, t, 2t^2-1\right)$ în care binormala este perpendiculară pe dreapta $d : \begin{cases} x+y=0 \\ 4x-z=0 \end{cases}$.

6.12 Se cer punctele curbei $\overline{r}(t) = \left(\frac{t^4}{2}, -\frac{t^3}{3}, t^2\right)$ în care tangenta este paralelă cu planul $\pi : 3x - 2y - 2z - 1 = 0$.

6.13 Să se arate că locul geometric al punctelor de intersecţie dintre planul xOy şi tangentele la curba $\overline{r}(t) = \left(t, t^2, t^3\right)$ este o conică C. Să se arate că C este înfăşuratoarea dreptelor de intersecţie dintre planul xOy şi planele osculatoare la curba dată.

6.14 Să se arate că planele normale la curba $\overline{r}(t) = \left(\sin^2 t, \sin t\cos t, \cos t\right)$ trec prin origine.

6.15 Se cer unghiurile dintre axele de coordonate şi tangenta la curba $\overline{r}(t) = \left(t - \sin t, 1 - \cos t, 4\sin\frac{t}{2}\right)$.

6.16 Se cer ecuaţiile tangentei şi planul normal la curba dată implicit $\Gamma : \begin{cases} x = y \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$.

6.17 Se cere planul osculator în punctul $M(1,1,1)$ la curba $\Gamma : \begin{cases} y^2 = x \\ x^2 = z \end{cases}$.

6.18 Pentru curbele următoare se cer versorii reperului Frenet, curbura şi torsiunea:

(i) $\overline{r} : I\!R \to I\!R^3, \overline{r}(t) = \left(1, t, \frac{t^2}{2}\right)$

(ii) (*elicea circulară*) $\overline{r} : I\!R \to I\!R^3, \overline{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ cu $a, b > 0$ constante

(iii) $\overline{r} : I\!R_+^* \to I\!R^3, \overline{r}(t) = \frac{1}{2}\left(t, \frac{1}{t}, \sqrt{2}\ln t\right)$

(iv) $\overline{r} : I\!R_+^* \to I\!R^3, \overline{r}(t) = \left(2t, \ln t, t^2\right)$

(v) $\overline{r} : I\!R \to I\!R^3, \overline{r}(t) = \left(t, t^2, \frac{2}{3}t^3\right)$

(vi) $\overline{r} : (0, 2\pi) \to I\!R^3, \overline{r}(t) = \left(t - \sin t, 1 - \cos t, 4\cos\frac{t}{2}\right)$

(vii) $\overline{r} : I\!R \to I\!R^3, \overline{r}(t) = \left(a(\sin t + \cos t), a(\sin t - \cos t), be^{-t}\right)$

(viii) $\overline{r} : I\!R \to I\!R^3, \overline{r}(t) = \left(ae^t\cos t, ae^t\sin t, be^t\right)$.

6.19 (*Curbe Ţiţeica*) O curbă $\overline{r} : I \to I\!R^3$ se numeşte *curbă Ţiţeica* dacă funcţia $f(t) = \frac{d^2(O, \pi_{osc}(t))}{\tau(t)}$ este constantă, unde

$d(O, \pi_{osc}(t))$ este distanţa de la originea O la $\pi_{osc}(t)$=planul osculator în $\overline{r}(t)$ iar $\tau(t)$ este torsiunea în $\overline{r}(t)$. Să se arate că:

$$f(t) = \frac{(\overline{r}, \overline{r}', \overline{r}'')^2}{(\overline{r}', \overline{r}'', \overline{r}''')}.$$

Să se arate că următoarele curbe sunt curbe Ţiţeica:

(i) $\overline{r}(t) = \left(\frac{1}{t}, \frac{1}{t^2}, t^3\right), t > 0$

(ii) $\overline{r}(t) = \left(e^{-2t}, e^t \cos\left(\sqrt{3}t\right), e^t \sin\left(\sqrt{3}t\right)\right)$.

6.20 Să se arate că următoarele curbe sunt curbe plane şi se cere planul osculator (care le conţine):

(i) $\overline{r}(t) = \left(\sin t, 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right), 1 + \cos t\right)$

(ii) $\overline{r}(t) = \left(t^2 - 1, t^2, -\ln t\right), \quad t \in (0, +\infty)$

(iii) $\overline{r}(t) = \left(t^2(2t+1), t(t-2), t\left(t^2+1\right) - 1\right)$.

6.21 Fie $f : I \to I\!R$ de clasă $C^k, k > 1$ şi curba grafic $\overline{r} : I \to I\!R^2, \overline{r}(t) = (t, f(t))$. Să se arate că: $k(t) = \frac{f''(t)}{\left(1+(f'(t))^2\right)^{\frac{3}{2}}}$.

6.22 Fie o curbă plană definită implicit de ecuaţia $F(x, y) = 0$. Să se arate că: $k(x, y) = -\frac{F_x^2 F_{yy} - 2F_x F_y F_{xy} + F_y^2 F_{xx}}{\left(F_x^2+F_y^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{-\Delta}{\left(F_x^2+F_y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$ unde Δ este determinantul $\Delta = \begin{vmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_x \\ F_{xy} & F_{yy} & F_y \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix}$.

Folosind această formulă se cere:

(i) să se reobţină curbura cercului de rază R centrat în origine.

(ii) curbura elipsei

(iii) curbura hiperbolei

(iv) curbura parabolei $y^2 = 2px$

(v) să se arate că dacă $\overline{n} = (n_1, n_2)$ este versorul normalei atunci avem următoarea formulă pentru curbură: $k = \frac{\partial n_1}{\partial x} + \frac{\partial n_2}{\partial y} = div\overline{n}$.

6.23 Aplicaţia $J : I\!R^2 \to I\!R^2, \quad J(x, y) = (-y, x)$ se numeşte *structura complexă a planului*. Să se arate că:

(i) J este endomorfism liniar al spaţiului vectorial $I\!R^2$

(ii) $J^2 = -Id$ unde Id este aplicaţia identică a lui $I\!R^2$(această relaţie motivează denumirea lui J)

(iii) J este *aplicaţie ortogonală* i.e. $< Jp, Jq >=< p, q >$ pentru orice $p, q \in I\!R^2$. Cu transformarea $q \to Jq$ rezultă că J este antisimetrică i.e. $< Jp, q >= - < p, Jq >$

(iv) $< Jp, p >= 0$ i.e. Jp este ortogonal pe p.

Identificând planul $I\!R^2$ cu mulţimea numerelor complexe să se arate că:

(v) $Jp = +i \cdot p$

(vi) $p \cdot \overline{q} =< p, q > +i < p, Jq >=< p, q > -i < Jp, q >$.

Să se arate că matricea lui J este $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{pmatrix}$ şi să se verifice pe această matrice proprietăţile (ii),(iii),(iv).

(vii) De ce sensul orar este opus sensului trigonometric?

6.24 (i) Să se arate că pentru o curbă plană $\overline{r} : (a, b) \to I\!R^2$ expresia curburii este:

$$k(t) = \frac{x'(t)\, y''(t) - x''(t)\, y'(t)}{\left(x'^2(t) + y'^2(t)\right)^{\frac{3}{2}}} = \frac{< J\overline{r}'(t), \overline{r}''(t) >}{\|\overline{r}'(t)\|^3}.$$

(ii) Folosind formula precedentă să se arate că pentru o curbă parametrizată canonic, i.e. $\|\overline{r}'(s)\| = 1$ pentru orice $s \in (a, b)$, avem: $\overline{r}''(s) = +k(s)\, J\overline{r}'(s)$.

6.25 Folosind formula din exerciţiul precedent se cere curbura pentru:

(i) *elipsa* $E : \overline{r}(t) = (a \cos t, b \sin t)$

(ii) *hiperbola* $H : \overline{r}(t) = (acht, bsht)$

(iii) $\overline{r}(t) = (\cos t + t \sin t, \sin t - t \cos t)$

(iv) spirala logaritmică,

(v) cicloida,

(vi) astroida.

6.26 Folosind exerciţiul 6.22 se cere curbura pentru:

(i) $C : xy = a^2$

(ii) $C : x^3 - y^3 + 2xy = 0$ în punctul $M(1, -1)$

(iii) $C : 3ay^2 - 2x^3 = 0$.

6.27 Dată curba plană C în coordonate polare $\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \end{cases}$ cu $\rho = \rho(\varphi)$ să se arate că C are curbura

$$k(\varphi) = \frac{2\rho'^2 + \rho^2 - \rho\rho''}{\left(\rho^2 + \rho'^2\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Aplicând această relaţie se cere curbura următoarelor curbe:

(i) (*lemniscata*) $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$

(ii) $\rho = a \sin^3 \frac{\varphi}{3}$

(iii) $\rho = a \sin 4\varphi$.

6.28 (*Curbe cilindrice*) (i) Să se definească şi să se studieze (după modelul exerciţiului 6.21) curbele cilindrice.

(ii) Să se determine curbele cilindrice Ţiţeica.

6.29 (*Formule Frenet generalizate*) Notăm cu E unul din următoarele corpuri: $\mathbb{R}$ al numerelor reale, $\mathbb{C}$ al numerelor complexe, $\mathbb{H}$ al cuaternionilor. Dându-se numărul natural impar n şi o curbă în spaţiul E^n se cer formulele Frenet corespunzătoare.

6.30 (*Noduri olonome*) O curbă în spaţiu $t \to \overline{r}(t)$ se numeşte *nod olonom* dacă există o funcţie periodică $f : I\!R \to I\!R$ astfel încât:

$$\overline{r}(t) = \left(-f(t), f'(t), -f''(t)\right).$$

A) Să se studieze nodurile olonome şi să se figureze pentru:
(i) $f(t) = \cos t$
(ii) $f(t) = \sin t$.
B) Să se studieze cazul când există numerele reale a, b aşa încât: $f'' = af' + bf$.

6.31 (*Curbe sferice*) Fie în spaţiu curba $C : \overline{r} = \overline{r}(s)$ parametrizată canonic şi având curbura k respectiv torsiunea τ.

(i) Fie punctul $\overline{r}(s_0) \in C$ cu $\tau(s_0) \neq 0$. Să se arate că sfera ce trece prin $\overline{r}(s_0)$ şi este centrată în punctul

$$\overline{r}(s_0) + \frac{1}{k(s_0)}\overline{n}(s_0) - \frac{k'(s_0)}{k^2(s_0)\tau(s_0)}\overline{b}(s_0)$$

are contact de ordinul 3 cu C. Această sferă este unic determinată cu aceste proprietăţi şi se numeşte *sfera osculatoare* în $\overline{r}(s_0)$.

(ii) Să se arate că C este situată pe o sferă dacă şi numai dacă are loc relaţia:

$$\frac{\tau}{k} = \left(\frac{k'}{k^2\tau}\right)'.$$

(iii) Presupunem C situată pe sfera unitate S^2 şi notăm $J := Det(\overline{r}, \overline{r}', \overline{r}'')$. Avem atunci:

$$\begin{cases} k = \sqrt{1+J^2} \\ \tau = \frac{J'}{1+J^2} \end{cases}.$$

Cercurile mari sunt caracterizate de $J = 0$ iar alte cercuri de $J =$constant.

6.2 Soluţii

6.1 Fie punctele distincte $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2)$ si d dreapta care le uneşte. Ecuaţia lui d este:

$\overline{r}(t) = (x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1), z_1 + t(z_2 - z_1))$. Punctul M_1 corespunde lui $t = 0$ iar punctul M_2 lui $t = 1$ deci: $d(M_1, M_2) = \int\limits_0^1 \|\overline{r}'(t)\| dt = \int\limits_0^1 \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} dt =$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

6.2 Cum ecuaţia cercului este: $\overline{r}(t) = (R\cos t, R\sin t), t \in (0, 2\pi)$ rezultă: $L(C) = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} dt = 2\pi R$.

6.3 $L(C) = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{R^2(1 - \cos t)^2 + R^2 \sin^2 t} dt = 2R \int\limits_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt = -4R \cos \frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8R$.

6.4 $L(C) = 3R \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\cos^2 t \sin t)^2 + \left(\sin^2 t \cos t\right)^2} dt = \frac{3}{2} R \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t dt = -\frac{3}{4} R \cos 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{2} R$.

Fig.1 Astroida cu $R = 3$

6.5 (i) $\overline{r}' = Re^{kt}(k\cos t - \sin t, k\sin t + \cos t), \|\overline{r}'\| = Re^{kt}\sqrt{k^2 + 1}, \|\overline{r}\| = Re^{kt}$ şi deci $cos\measuredangle(\overline{r}, \overline{r}') = \frac{k}{\sqrt{k^2+1}}$ deoarece $< \overline{r}, \overline{r}' >= R^2 k e^{2kt}$.

(ii) $a_n = R\sqrt{k^2 + 1} \int\limits_{2n\pi}^{2(n+1)\pi} e^{kt} dt = \frac{\sqrt{k^2+1}}{k} R \left(e^{2(n+1)k\pi} - e^{2nk\pi}\right)$ de unde rezulta: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = e^{2k\pi} = const > 1$.

Fig.2 Spirala logaritmică cu $R = \dfrac{1}{3}, k = \dfrac{1}{7}$

6.6 Deoarece $\overline{r}'(t) = (1, f'(t))$ avem imediat concluzia.

6.7 Fie α, β, γ unghiurile formate de tangentă, normala principală şi binormala cu versorul director $\overline{k}$ al axei Oz. Avem:

$$\overline{r}' = e^t(\sin t + \cos t, \cos t - \sin t, 1), \overline{r}'' = e^t(2\cos t, 2\sin t, 1), \|\overline{r}'\| = \sqrt{3}e^t$$

$$\overline{r}' \times \overline{r}'' = e^{2t}(\cos t + \sin t, \cos t - \sin t, -2), \|\overline{r}' \times \overline{r}''\| = \sqrt{6}e^{2t}$$

$$\left(\overline{r}' \times \overline{r}''\right) \times \overline{r}' = e^{3t}(3(\cos t - \sin t), -3(\cos t + \sin t), 0), \|\left(\overline{r}' \times \overline{r}''\right) \times \overline{r}'\| = 3\sqrt{2}e^{3t}$$

de unde rezultă:

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{<\overline{r}', \overline{k}>}{\|\overline{r}'\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \cos\beta = \frac{<(\overline{r}' \times \overline{r}'') \times \overline{r}', \overline{k}>}{\|(\overline{r}' \times \overline{r}'') \times \overline{r}'\|} = 0 \\ \cos\gamma = \frac{<\overline{r}' \times \overline{r}'', \overline{k}>}{\|\overline{r}' \times \overline{r}''\|} = -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{cases}.$$

6.8 Normala la planul π este: $\overline{N}(\pi) = (7, -12, 5)$ iar normala la planul osculator este binormala $\overline{r}' \times \overline{r}''$. Avem:

$$\overline{r}' = \left(2, 3t^2, -2t\right), \overline{r}'' = (0, 6t, -2), \overline{r}' \times \overline{r}'' = 2\left(3t^2, 2, 6t\right).$$

Din condiţia: $0 =< \overline{N}(\pi), \overline{r}' \times \overline{r}'' >= 21t^2 + 30t - 24 = 3\left(7t^2 + 10t - 8\right)$ obţinem: $t_1 = -2, t_2 = \frac{4}{7}$. Avem:

$$\pi_{osc}(1) : 6x + y - 6z + 20 = 0, \pi_{osc}(2) : \frac{24}{49}x + y + \frac{12}{7}z - \frac{66}{49} = 0.$$

6.9 Avem sistemul diferenţial:

$$\frac{dx}{yz} = \frac{dy}{z(x-1)} = \frac{dz}{y(x-1)}.$$

Din prima şi ultima fracţie avem integrala: $\frac{x^2}{2} - x = \frac{z^2}{2} + c_1$, iar din ultimele două fracţii avem integrala: $y^2 - z^2 = c_2$. Prin urmare avem familia 2-parametrică de curbe $C(c_1, c_2) : \begin{cases} x^2 - z^2 - 2x - c_1 = 0 \\ y^2 - z^2 - c_2 = 0 \end{cases}$.

6.10 Ecuaţia tangentei este: $\frac{x - a\cos t}{-a\sin t} = \frac{y + a\sin t}{-a\cos t} = \frac{z - be^t}{be^t}$. Făcând $z = 0$ obţinem $\begin{cases} x = a(\cos t + \sin t) \\ y = a(\cos t - \sin t) \end{cases}$ care este cercul $\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{a}\right)^2 = 2$ în planul xOy.

6.11 Scriind dreapta sub forma $d : \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 4t \end{cases}$ rezultă că vectorul director al dreptei este $\overline{a} = (1, -1, 4)$. Deoarece:

$$\overline{r}' = \left(-\frac{1}{t^2}, 1, 4t\right), \overline{r}'' = \left(\frac{2}{t^3}, 0, 4\right)$$

rezultă că vectorul binormalei este: $\overline{r}' \times \overline{r}'' = 2\left(2, \frac{6}{t^2}, -\frac{1}{t^2}\right)$. Din condiţia $< \overline{a}, \overline{r}' \times \overline{r}'' >= 0 = 2 - \frac{6}{t^2} - \frac{4}{t^3}$ rezultă ecuaţia $t^3 - 3t - 2 = 0$ cu soluţiile: $t_1 = t_2 = -1, t_3 = 2$ deci punctele $P_1(-1, -1, 1), P_2(\frac{1}{2}, 2, 7)$.

6.12 Normala la π este: $\overline{N}(\pi) = (3, -2, -2)$ şi deci tangenta la curbă, $\overline{r}'(t) = \left(2t^3, -t^2, 2t\right)$ trebuie să fie perpendiculară pe acest vector. Din $< \overline{N}(\pi), \overline{r}'(t) >= 0 = 2t\left(3t^2 + t - 2\right)$ rezultă: $t_1 = 0, t_2 = -1, t_3 = \frac{2}{3}$. Dar în punctul t_1 avem $\overline{r}'(0) = \overline{0}$ ceea ce contrazice regularitatea curbei deci singurele soluţii valabile rămân t_2 şi t_3 cu $P_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 1\right), P_3\left(\frac{8}{81}, -\frac{8}{81}, \frac{4}{9}\right)$.

6.13 Tangenta este: $\frac{x-t}{1} = \frac{y-t^2}{2t} = \frac{z-t^3}{3t^2}$ şi deci intersecţia acestei tangente cu xOy este $C : \begin{cases} x = \frac{2t}{3} \\ y = \frac{t^2}{3} \end{cases}$. Prin eliminarea lui t obţinem $C : y = \frac{3}{4}x^2$ care este o parabolă. Planul osculator este $\pi_{osc} : \begin{vmatrix} x - t & y - t^2 & z - t^3 \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 0$ şi să notăm cu $\Gamma_t = \pi_{osc} \cap xOy : \begin{vmatrix} x - t & y - t^2 & -t^3 \\ 1 & 2t & 3t^2 \\ 0 & 2 & 6t \end{vmatrix} = 0$. La final obţinem $\Gamma_t : 3y - 3tx + t^2 = 0$.

Reamintim că dată familia de curbe $\Gamma_t : F(x,y,t) = 0$ numim *înfăşurătoare* a acestei familii, curba $\begin{cases} F(x,y,t) = 0 \\ F_t(x,y,t) = 0 \end{cases}$. În cazul de faţă $F_t = -3x+2t = 0$ implică $t = \frac{3}{2}x$ şi înlocuind această expresie în ecuaţia lui Γ_t obţinem $y = \frac{3}{4}x^2$ ceea ce voiam.

6.14 Deoarece $\overline{r}'(t) = (\sin 2t, \cos 2t, -\sin t)$ avem planul normal π_{nor} : $\sin 2t\left(x - \sin^2 t\right) + \cos 2t\left(y - \frac{1}{2}\sin 2t\right) - \sin t\,(z - \cos t) = 0$ şi în final π_{nor} : $\sin 2tx + \cos 2ty - \sin tz = 0$. Deoarece termenul liber din ecuaţia lui π_{nor} este nul rezultă că originea aparţine planului normal.

6.15 Fie $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)$ unghiul făcut de tangentă $\overline{r}'(t)$ cu axele $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$. Avem: $\overline{r}'(t) = \left(1 - \cos t, \sin t, 2\cos\frac{t}{2}\right)$ şi $\|\overline{r}'(t)\| = 2$ de unde rezultă: $\cos\alpha(t) = \sin^2\frac{t}{2}, \cos\beta(t) = \frac{1}{2}\sin t, \cos\gamma(t) = \cos\frac{t}{2}$.

6.16 Cu notaţia $x = t$ obţinem $y = t, z = 2t^2$ şi deci avem curba C: $\overline{r}(t) = \left(t, t, 2t^2\right)$. Ecuaţia tangentei este: $\frac{x-t}{1} = \frac{y-t}{1} = \frac{z-2t^2}{4t}$ iar planul normal este $\pi_{nor} : x + y + 4tz - 2t - 8t^3 = 0$.

6.17 Mai întâi observăm că punctul dat este pe curbă. Cu substituţia $y = t$ rezultă: $x = t^2, z = t^4$ şi deci avem curba $C : \overline{r}(t) = \left(t^2, t, t^4\right)$ cu planul osculator $\pi_{osc} : \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 12 \end{vmatrix} = 0$ şi în final $\pi_{osc} : 6x - 8y - z + 3 = 0$.

6.18

(i)

$$\overline{r}' = (0,1,t), \overline{r}'' = (0,0,1), \overline{r}''' = (0,0,0)$$

$$\|\overline{r}'\| = \sqrt{1+t^2}, \overline{r}' \times \overline{r}'' = (1,0,0), \|\overline{r}' \times \overline{r}''\| = 1, \left(\overline{r}', \overline{r}'', \overline{r}'''\right) = 0$$

$$\begin{cases} \overline{t}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(0,1,t) \\ \overline{b}(t) = (1,0,0) \\ \overline{n}(t) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(0,-t,1) \\ k(t) = \frac{1}{(1+t^2)^{\frac{3}{2}}} \\ \tau(t) = 0 \end{cases}.$$

(ii)

$$\overline{r}' = (-a\sin t, a\cos t, b), \overline{r}'' = (-a\cos t, -a\sin t, 0), \overline{r}''' = (a\sin t, -a\cos t, 0)$$

$$\|\overline{r}'\| = \sqrt{a^2+b^2}, \overline{r}' \times \overline{r}'' = a(b\sin t, -b\cos t, a), \|\overline{r}' \times \overline{r}''\| = a\sqrt{a^2+b^2}$$

$$\left(\overline{r}', \overline{r}'', \overline{r}'''\right) = a^2 b$$

$$\begin{cases} \bar{t}\,(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\,(-a\sin t, a\cos t, b) \\ \bar{b}\,(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\,(b\sin t, -b\cos t, a) \\ \overline{n}\,(t) = (-\cos t, -\sin t, 0) \\ k\,(t) = \frac{a}{a^2+b^2} \\ \tau\,(t) = \frac{b}{a^2+b^2} \end{cases}.$$

Deci curbura şi torsiunea elicei sunt constante (şi proporţionale).

(iii)

$$\overline{r}' = \frac{1}{2}\left(1, -\frac{1}{t^2}, \frac{\sqrt{2}}{t}\right), \overline{r}'' = \frac{1}{2}\left(0, \frac{2}{t^3}, -\frac{\sqrt{2}}{t^2}\right), \overline{r}''' = \frac{1}{2}\left(0, -\frac{6}{t^4}, \frac{2\sqrt{2}}{t^3}\right), \|\overline{r}'\| = \frac{1}{2t^2}\left(1+t^2\right)$$

$$\overline{r}' \times \overline{r}'' = \frac{1}{4t^4}\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}t^2, 2t\right), \|\overline{r}' \times \overline{r}''\| = \frac{\sqrt{2}}{4t^4}\left(1+t^2\right), \left(\overline{r}', \overline{r}'', \overline{r}'''\right) = -\frac{\sqrt{2}}{4t^6}$$

$$\begin{cases} \bar{t}\,(t) = \frac{1}{1+t^2}\left(t^2, -1, \sqrt{2}t\right) \\ \bar{b}\,(t) = \frac{1}{1+t^2}\left(-1, t^2, \sqrt{2}t\right) \\ \overline{n}\,(t) = \frac{1}{1+t^2}\left(\sqrt{2}t, \sqrt{2}t, 1-t^2\right) \\ k\,(t) = \frac{2\sqrt{2}t^2}{\left(1+t^2\right)^2} \\ \tau\,(t) = -\frac{2\sqrt{2}t^2}{\left(1+t^2\right)^2} \end{cases}.$$

(iv)

$$\overline{r}' = \left(2, \frac{1}{t}, 2t\right), \overline{r}'' = \left(0, -\frac{1}{t^2}, 2\right), \overline{r}''' = \left(0, \frac{2}{t^3}, 0\right), \|\overline{r}'\| = \frac{2t^2+1}{t}$$

$$\overline{r}' \times \overline{r}'' = \frac{2}{t^2}\left(2t, -2t^2, -1\right), \|\overline{r}' \times \overline{r}''\| = \frac{2}{t^2}\left(1+2t^2\right), \left(\overline{r}', \overline{r}'', \overline{r}'''\right) = -\frac{8}{t^3}$$

$$\begin{cases} \bar{t}\,(t) = \frac{1}{2t^2+1}\left(2t, 1, 2t^2\right) \\ \bar{b}\,(t) = \frac{1}{2t^2+1}\left(2t, -2t^2, 1\right) \\ \overline{n}\,(t) = \frac{1}{2t^2+1}\left(1-2t^2, -2t, 2t\right) \\ k\,(t) = \frac{2t}{\left(2t^2+1\right)^2} \\ \tau\,(t) = -\frac{2t}{\left(2t^2+1\right)^2} \end{cases}.$$

(v)

$$\overline{r}' = \left(1, 2t, 2t^2\right), \overline{r}'' = (0, 2, 4t), \overline{r}''' = (0, 0, 4), \|\overline{r}'\| = 2t^2+1$$

$$\overline{r}' \times \overline{r}'' = 2\left(2t^2, -2t, 1\right), \|\overline{r}' \times \overline{r}''\| = 2\left(2t^2+1\right), \left(\overline{r}', \overline{r}'', \overline{r}'''\right) = 8$$

$$\begin{cases} \bar{t}\,(t) = \frac{1}{2t^2+1}\left(1, 2t, 2t^2\right) \\ \bar{b}\,(t) = \frac{1}{2t^2+1}\left(2t^2, -2t, 1\right) \\ \overline{n}\,(t) = \frac{1}{2t^2+1}\left(-2t, 1-2t^2, 2t\right) \\ k\,(t) = \frac{2}{\left(2t^2+1\right)^2} \\ \tau\,(t) = \frac{2}{\left(2t^2+1\right)^2} \end{cases}.$$

(vi)

$$\overline{r}' = \left(1 - \cos t, \sin t, -2\sin\frac{t}{2}\right), \overline{r}'' = \left(\sin t, \cos t, -\cos\frac{t}{2}\right),$$

$$\overline{r}''' = \left(\cos t, -\sin t, \frac{1}{2}\sin\frac{t}{2}\right)$$

$$\|\overline{r}'\| = 2\sqrt{2}\sin\frac{t}{2}, \overline{r}' \times \overline{r}'' = -2\sin^2\frac{t}{2}\left(\sin\frac{t}{2}, \cos\frac{t}{2}, 1\right)$$

$$\|\overline{r}' \times \overline{r}''\| = 2\sqrt{2}\sin^2\frac{t}{2}, \left(\overline{r}', \overline{r}'', \overline{r}'''\right) = \sin^3\frac{t}{2}$$

$$\begin{cases} \bar{t}\,(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{t}{2}, \cos\frac{t}{2}, -1\right) \\ \bar{b}\,(t) = -\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sin\frac{t}{2}, \cos\frac{t}{2}, 1\right) \\ \overline{n}\,(t) = \left(\cos\frac{t}{2}, -\sin\frac{t}{2}, 0\right) \\ k\,(t) = \frac{1}{8\sin\frac{t}{2}} \\ \tau\,(t) = \frac{1}{8\sin\frac{t}{2}} \end{cases}.$$

(vii)

$$\overline{r}' = \left(a\left(\cos t - \sin t\right), a\left(\cos t + \sin t\right), -be^{-t}\right), \|\overline{r}'\| = \sqrt{2a^2 + b^2e^{-2t}}$$

$$\overline{r}'' = \left(a\left(-\sin t - \cos t\right), a\left(\cos t - \sin t\right), be^{-t}\right)$$

$$\overline{r}''' = \left(a\left(\sin t - \cos t\right), s\left(\cos t - \sin t\right), -be^{-t}\right), \left(\overline{r}', \overline{r}'', \overline{r}'''\right) = -4a^2be^{-t}$$

$$\overline{r}' \times \overline{r}'' = 2a\left(be^{-t}\cos t, be^{-t}\sin t, a\right), \|\overline{r}' \times \overline{r}''\| = 2a\sqrt{a^2 + b^2e^{-2t}}$$

$$\begin{cases} \bar{t}\,(t) = \frac{1}{\sqrt{2a^2+b^2e^{-2t}}}\left(a\left(\cos t - \sin t\right), a\left(\sin t + \cos t\right), -be^{-t}\right) \\ \bar{b}\,(t) = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2e^{-2t}}}\left(be^{-t}\cos t, be^{-t}\sin t, a\right) \\ \overline{n}\,(t) = \frac{1}{\sqrt{\left(2a^2+b^2e^{-2t}\right)\left(a^2+b^2e^{-2t}\right)}}\begin{pmatrix} -a^2\cos t - \left(a^2 + b^2e^{-2t}\right)\sin t, \\ \left(a^2 + b^2e^{-2t}\right)\cos t - a^2\sin t, abe^{-t} \end{pmatrix} \\ k\,(t) = \frac{2a\sqrt{a^2+b^2e^{-2t}}}{\left(2a^2+b^2e^{-2t}\right)^{\frac{3}{2}}} \\ \tau\,(t) = -\frac{be^{-t}}{a^2+b^2e^{-2t}} \end{cases}.$$

(viii)

$$\overline{r}' = e^t\left(a\left(\cos t - \sin t\right), a\left(\sin t + \cos t\right), b\right), \overline{r}'' = e^t\left(-2a\sin t, 2a\cos t, b\right)$$

$$\overline{r}''' = e^t\left(-2a\left(\cos t + \sin t\right), 2a\left(\cos t - \sin t\right), b\right),$$

$$\overline{r}' \times \overline{r}'' = ae^{2t}\left(b\left(\sin t - \cos t\right), -b\left(\cos t + \sin t\right), 2a\right), \left(\overline{r}', \overline{r}'', \overline{r}'''\right) = 2a^2be^{3t}$$

$$\|\overline{r}'\| = e^t\sqrt{2a^2+b^2}, \|\overline{r}' \times \overline{r}''\| = \sqrt{2}ae^{2t}\sqrt{2a^2+b^2}$$

$$\begin{cases} \overline{t}\left(t\right) = \frac{1}{\sqrt{2a^2+b^2}}\left(a\left(\cos t - \sin t\right), a\left(\sin t + \cos t\right), b\right) \\ \overline{b}\left(t\right) = \frac{1}{\sqrt{2(2a^2+b^2)}}\left(b\left(\sin t - \cos t\right), -b\left(\sin t + \cos t\right), 2a\right) \\ \overline{n}\left(t\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\left(\sin t + \cos t\right), \cos t - \sin t, 0\right) \\ k\left(t\right) = \frac{\sqrt{2}a}{e^t(2a^2+b^2)} \\ \tau\left(t\right) = \frac{be^{-t}}{2a^2+b^2} \end{cases}.$$

6.19 Avem $\pi_{osc}\left(t\right) : \begin{vmatrix} x - x\left(t\right) & y - y\left(t\right) & z - z\left(t\right) \\ x'\left(t\right) & y'\left(t\right) & z'\left(t\right) \\ x''\left(t\right) & y''\left(t\right) & z''\left(t\right) \end{vmatrix} = 0$. Notând A, B, C minorii corespunzatori elemetelor din linia întâi rezultă:

$d^2\left(O, \pi_{osc}\left(t\right)\right) = \frac{\left(\overline{r}, \overline{r}', \overline{r}''\right)^2}{A^2+B^2+C^2}$ şi $\tau\left(t\right) = \frac{\left(\overline{r}', \overline{r}'', \overline{r}'''\right)}{A^2+B^2+C^2}$ de unde relaţia cerută.

(i) Obţinem $\left(\overline{r}, \overline{r}', \overline{r}''\right) = \frac{20}{t^3}, \left(\overline{r}', \overline{r}'', \overline{r}'''\right) = -\frac{120}{t^6}, f = -\frac{10}{3}$.

Observaţie: Curba dată se află pe suprafaţa Ţiţeica (ii) de la exerciţiul 7.31.

(ii) $\left(\overline{r}', \overline{r}'', \overline{r}'''\right) = -8 \cdot 12\sqrt{3}, d^2\left(O, \pi_{osc}\right) = 12^2 \cdot 3, f = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

6.20 Arătăm că $\overline{b}\left(t\right) = \frac{\overline{r}' \times \overline{r}''}{\|\overline{r}' \times \overline{r}''\|}$ este versor constant de unde obţinem că acea curbă este plană şi totodată ecuaţia planului osculator.

(i) $\overline{r}' = \left(\cos t, 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - t\right), -\sin t\right), \overline{r}'' = -\left(\sin t, 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - t\right), \cos t\right), \overline{r}' \times \overline{r}'' = \left(-\sqrt{2}, 1, -\sqrt{2}\right)$ deci concluzia şi $\pi_{osc} : \sqrt{2}x - y + \sqrt{2}z - \sqrt{2} = 0$.

(ii) $\overline{r}' = \left(2t, 2t, -\frac{1}{t}\right), \overline{r}'' = \left(2, 2, \frac{1}{t^2}\right), \overline{r}' \times \overline{r}'' = \frac{4}{t}\left(1, -1, 0\right)$ de unde concluzia şi $\pi_{osc} : x - y + 1 = 0$.

(iii) $\overline{r}' = \left(6t^2 + 2t, 2t - 2, 3t^2 + 1\right), \overline{r}'' = \left(12t + 2, 2, 6t\right), \overline{r}' \times \overline{r}'' = 2\left(3t^2 - 6t - 1\right)\left(1, -1, 2\right)$ de unde concluzia şi $\pi_{osc} : x - y - 2z - 2 = 0$.

6.21 Avem $\overline{r}' = \left(1, f'\left(t\right)\right), \overline{r}'' = \left(0, f''\left(t\right)\right)$ şi aplicăm, spre exemplu, punctul (i) de la problema 6.24.

6.22 Calcul imediat folosind exerciţiul precedent şi faptul că din relaţia $F\left(t, f\left(t\right)\right) = 0$ rezultă $f' = -\frac{F_x}{F_y}$ si $f'' = -\frac{F_x^2F_{yy} - 2F_xF_yF_{xy} + F_y^2F_{xx}}{F_y^3}$.

(ii) $k\left(x, y\right) = -\frac{a^4b^4}{\left(b^4x^2 + a^4y^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

(iii) $k(x,y)=\frac{a^4b^4}{(b^4x^2+a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}$

(iv) Folosind funcţia $F(x,y)=2px-y^2$ avem $k(x,y)=\frac{p^2}{(p^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$.

6.23 (i)-(vi) Verificări imediate.

(vii) Datorită punctului (v) putem spune că sensul trigonometric corespunde lui J.

Sensul orar este descris de ceas care este un oscilator armonic. Din legea a II-a a dinamicii $\overline{F}=m\overline{a}$ cum $\overline{F}=-kx$ iar $\overline{a}=\ddot{x}$ rezultă ecuaţia generală a oscilatorului armonic: $m\ddot{x}+kx=0$ unde k este constanta elastică. Notând pulsaţia $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$ ecuaţia precedentă devine: $\ddot{x}+\omega^2x=0$. Dar ceasul are $\omega=1$ bătând secunda şi deci ecuaţia ce guvernează ceasul este: $\ddot{x}+x=0$ care se poate scrie, reducând la ordinul întâi:

$$\begin{cases}\dot{x}=y\\ \dot{y}=-x\end{cases}$$

sau inca:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\-x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=-J\cdot\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}.$$

În concluzie ceasul este descris de $(-J)$ ceea ce explică faptul că sensul orar este opus sensului trigonometric.

6.24 (i) Se verifică imediat. (ii) Din $\|\overline{r}(s)\|^2=1$ rezultă prin derivare $<\overline{r}''(s),\overline{r}'(s)>=0$ deci $\overline{r}''(s)$ este vector paralel cu $J\overline{r}'(s)$ şi obţinem că factorul de proporţionalitate este $+k(s)$.

6.25 (i) $\overline{r}'=(-a\sin t,b\cos t),\overline{r}''=(-a\cos t,-b\sin t)$,

$k(t)=\frac{ab}{\left(a^2\sin^2 t+b^2\cos^2 t\right)^{\frac{3}{2}}}$. Spre exemplu, $k(0)=\frac{a}{b^2},k\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{b}{a^2},k\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{ab}{\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}$.

(ii) $\overline{r}'=(asht,bcht),\overline{r}''=(acht,bsht),k(t)=\frac{-ab}{(a^2sh^2t+b^2ch^2t)^{\frac{3}{2}}}$. Spre exemplu, $k(0)=-\frac{a}{b^2}$ si $\lim\limits_{t\to\pm\infty}k(t)=0$ ceea ce confirmă faptul că hiperbola are asimptote!

(iii) $\overline{r}'=(t\cos t,t\sin t),\overline{r}''=(\cos t-t\sin t,\sin t+t\cos t),k(t)=\frac{1}{t}$

(iv) $k(t)=\frac{e^{-kt}}{R\sqrt{k^2+1}}$

(v) $k(t)=\frac{-1}{4R\sin\frac{t}{2}}$

Fig. 3 Cicloida cu $R = 1$ pentru $t \in (-5, 5)$.

(vi) $k = -\frac{1}{3R \sin t \cos t}$.

6.26 (i) $k(x, y) = \frac{-2a^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

Fig. 4 Hiperbola echilateră cu $a = 2$ cu $x, y \in (-5, 5)$.

(ii) $k(1, -1) = 4\sqrt{2}$

(iii) $k(x, y) = \frac{-a\sqrt{3}}{\sqrt{x(3x+2a)}}$.

6.27 Folosim formula de la exerciţiul 6.24 (i) şi relaţiile imediate:

$$\begin{cases} x' = \rho' \cos \varphi - \rho \sin \varphi \\ y' = \rho' \sin \varphi + \rho \cos \varphi \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' = \rho'' \cos\varphi - 2\rho' \sin\varphi - \rho\cos\varphi \\ y'' = \rho'' \sin\varphi + 2\rho' \cos\varphi - \rho\sin\varphi \end{cases} .$$

Astfel avem că $x'^2 + y'^2 = \rho^2 + \rho'^2$.

(i) $k(\varphi) = \frac{3}{a}\sqrt{\cos 2\varphi}$

(ii) $k(\varphi) = \frac{4}{3a\sin^2\frac{\varphi}{3}}$

(iii) $k(\varphi) = \frac{17+15\cos^2 4\varphi}{a(1+15\cos^2 4\varphi)^{\frac{3}{2}}}$

Fig. 5 Curba dată cu $a = 1$şi $\varphi \in (-5, 5)$.

6.28 (i)

A) *Curbele cilindrice eliptice* au reprezentarea:

$$\overline{r}(t) = (\cos t, \sin t, f(t))$$

pentru $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Au fost folosite de Gheorghe Vrânceanu (1900-1979) în conexiune cu teoremele Levi-Civita şi Fenchel din teoria suprafeţelor în:

Vrânceanu, Gh., *Sur les courbes cylindriques fermées* , Rev. Roumaine Math. Pures et Appl., 21(1976), no. 5, 601-607.

Rezultă:

$$\begin{cases} \overline{r}'(t) = (-\sin t, \cos t, f'(t)) \\ \overline{r}''(t) = (-\cos t, -\sin t, f''(t)) \\ \overline{r}'''(t) = (\sin t, -\cos t, f'''(t)) \end{cases}$$

$$\|\overline{r}'(t)\| = \sqrt{1 + f'^2(t)}$$

şi deci:

$$\overline{t}(t) := \frac{\overline{r}'(t)}{\|\overline{r}'(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{1 + f'^2(t)}}\left(-\sin t, \cos t, f'(t)\right).$$

Din:

$$\overline{r}'(t)\times\overline{r}''(t)=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ -\sin t & \cos t & f'(t)\\ -\cos & -\sin t & f''(t)\end{vmatrix}=$$

$$=\left(f''(t)\cos t+f'(f)\sin t, f''(t)\sin t-f'(t)\cos t, 1\right)$$

$$\|\overline{r}'(t)\times\overline{r}''(t)\|=\sqrt{1+f'^2(t)+f''^2(t)}$$

rezultă:

$$\overline{b}(t):=\frac{\overline{r}'\times\overline{r}''}{\|\overline{r}'\times\overline{r}''\|}=\frac{1}{\sqrt{1+f'^2+f''^2}}\left(f''\cos t+f'\sin t, f''\sin t-f'\cos t, 1\right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{(1+f'^2)(1+f'^2+f''^2)}}\overline{n}(t)=$$

$$=\left(f'f''\sin t-\left(1+f'^2\right)\cos t, -f'f''\cos t-\left(1+f'^2\right)\sin t, f''\right)$$

$$k(t):=\frac{\|\overline{r}'\times\overline{r}''\|}{\|\overline{r}'\|^3}=\frac{1}{1+f'^2}\sqrt{\frac{1+f'^2+f''^2}{1+f'^2}}.$$

În determinantul:

$$\left(\overline{r}',\overline{r}'',\overline{r}'''\right)=\begin{vmatrix}-\sin t & \cos t & f'\\ -\cos t & -\sin t & f''\\ -\sin t & -\cos t & f'''\end{vmatrix}$$

adunăm ultima linie la prima:

$$\left(\overline{r}',\overline{r}'',\overline{r}'''\right)=\begin{vmatrix}0 & 0 & f'+f''\\ -\cos t & -\sin t & f''\\ -\sin t & -\cos t & f'''\end{vmatrix}=f'+f'''$$

ceea ce dă:

$$\tau(t):=\frac{\left(\overline{r}',\overline{r}'',\overline{r}'''\right)}{\|\overline{r}'\times\overline{r}''\|}=\frac{f'+f'''}{1+f'^2+f''^2}.$$

Exemple. În lucrarea citată la începutul soluţiei sunt date două exemple:
(1) $f(t)=\cos 2t$ (pag. 605)
(2) $f(t)=\sin 2t$ (pag. 607)
B) *Curbele cilindrice hiperbolice* au reprezentarea:

$$\overline{r}(t)=(cht, sht, f(t)).$$

După un calcul analog celui precedent obţinem:

$$\begin{cases} \overline{r}'(t) = (sht, cht, f'(t)) \\ \overline{r}''(t) = (cht, sht, f''(t)) \\ \overline{r}'''(t) = (sht, cht, f'''(t)) \end{cases}$$

$$\|\overline{r}'(t)\| = \sqrt{ch^2 t + sh^2 t + f'^2(t)}$$

$$\overline{t}(t) = \frac{1}{\sqrt{ch^2 t + sh^2 t + f'^2(t)}} \big(sht, cht, f'(t)\big)$$

$$\overline{r}' \times \overline{r}'' = \big(f''cht - f'sht, f'cht - f''sht, -1\big)$$

$$\|\overline{r}' \times \overline{r}''\| = \sqrt{1 + (f'^2 + f''^2)(ch^2 t + sh^2 t) - 4f'f''chtsht}$$

$$\overline{b}(t) = \frac{1}{\|\overline{r}' \times \overline{r}''\|} \big(f''cht - f'sht, f'cht - f''sht, -1\big)$$

$$\|\overline{r}'\|\|\overline{r}' \times \overline{r}''\|\overline{n}(t) =$$

$$= \left(\left(f'^2 + 1\right) cht - f'f''sht, \left(f'^2 - 1\right) sht - f'f''cht, f''\frac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} - f'\frac{e^{2t} - e^{-2t}}{2}\right)$$

$$k(t) = \frac{\sqrt{1 + (f'^2 + f''^2)(ch^2 t + sh^2 t) - 4f'f''chtsht}}{(ch^2 t + sh^2 t + f'^2)\sqrt{ch^2 t + sh^2 t + f'^2}}.$$

Din:

$$\left(\overline{r}', \overline{r}'', \overline{r}'''\right) = \begin{vmatrix} sht & cht & f' \\ cht & sht & f'' \\ sht & cht & f''' \end{vmatrix} \overset{\text{linia 3-linia 1}}{=} \begin{vmatrix} sht & cht & f' \\ cht & sht & f'' \\ 0 & 0 & f''' - f' \end{vmatrix} = f' - f'''$$

rezultă:

$$\tau(t) = \frac{f' - f'''}{1 + (f'^2 + f''^2)(ch^2 t + sh^2 t) - 4f'f''chtsht}.$$

(ii)

A) Avem că distanţa de la origine la planul osculator este:

$$d(t) = \frac{|(f''\cos t + f'\sin t)(-\cos t) + (f''\sin t - f'\cos t)(-\sin t) - f|}{\sqrt{1 + f'^2 + f''^2}} =$$

$$= \frac{\pm(f + f'')}{\sqrt{1 + f'^2 + f''^2}}.$$

Presupunem satisfacută conditia Ţiţeica cu constanta $K \neq 0$, deoarece curba nu este într-un plan:

$$\frac{\tau(t)}{d^2(t)} = K = \frac{f'(t) + f'''(t)}{(f(t) + f''(t))^2}.$$

Prin integrare rezultă:

$$\frac{1}{f(t) + f''(t)} = -(Kt + C)$$

cu C o constantă reală. Scriem ultima relaţie sub forma:

$$f''(t) + f(t) = \frac{-1}{Kt + C}.$$

Dar această ecuaţie diferenţiala este exact de tipul oscilatorului armonic forţat (" forced harmonic oscillator"):

$$\ddot{x}(t) + x(t) = g(t)$$

care are soluţia generală:

$$x(t) = x(0)\cos t - \dot{x}(0)\sin t + \int_0^t g(u)\sin(u - t)\,du$$

În concluzie:

O curbă cilindrică eliptică este Ţiţeica dacă şi numai dacă:

$$f(t) = f(0)\cos t - \dot{f}(0)\sin t - \int_0^t \frac{\sin(u-t)}{Ku + C}du$$

cu $f(0), \dot{f}(0), K \neq 0, C$ *constante reale.*

B) Avem:

$$d(t) = \frac{|(f''cht - f'sht)(-cht) + (f'cht - f''sht)(-sht) + f|}{\sqrt{1 + (f'^2 + f''^2)(ch^2t + sh^2t) - 4f'f''chtsht}} =$$

$$= \frac{\pm(f - f'')}{\sqrt{1 + (f'^2 + f''^2)(ch^2t + sh^2t) - 4f'f''chtsht}}.$$

Dacă avem condiţia Ţiţeica:

$$\frac{\tau(t)}{d^2(t)} = K = \frac{f' - f'''}{(f - f'')^2}$$

o integrare dă:

$$\frac{1}{f - f''} = -(Kt + C)$$

sau încă:

$$f'' - f = \frac{1}{Kt + C}.$$

Folosind identitatea:

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} t} = \begin{pmatrix} cht & sht \\ sht & cht \end{pmatrix}$$

rezultă:

O curbă cilindrică hiperbolică este Ţiţeica dacă şi numai dacă:

$$f(t) = f(0)\, cht + \dot{f}(0)\, sht + \int_0^t \frac{sh(t+u)}{Ku + C}$$

cu $f(0), \dot{f}(0), K \neq 0$ *şi* C *constante reale.*

Rezolvarea acestui punct urmăreşte lucrarea:

Crâşmăreanu, M., *Cylindrical Tzitzeica curves implies harmonic oscillators*, Balkan J. of Geometry and Its Applications, 7(2002), no. 1, 37-43.

6.29 Pe spaţiul E^n avem produsul scalar:

$$E^n \times E^n \ni (x, y) \to < x, y >= \sum_{i=1}^{n} x^i \overline{y}^i \in E$$

unde am notat $x = \left(x^1, \ldots, x^n\right)$ iar prin $\overline{x}^i$ conjugatul lui x^i. Definim atunci $\|x\| = \sqrt{< x, x >}$.

În lucrarea:

Wong, Y. C., *Frenet formulas for curves in real, complex and quaternionic euclidian spaces*, Differential geometry in honor of K. Yano, Kinokuniya, Japan, 1972, 525-545,

este demonstrată următoarea:

Propoziţie. *Fie în E^n cu n impar, o curbă de clasă C^∞, parametrizată canonic $C : x = x(s)$. Presupunem că vectorii $\frac{dx}{ds}(s), \ldots, \frac{d^n x}{ds^n}(s)$ sunt liniari independenţi pentru orice s. Atunci există un unic reper ortonormat $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de-a lungul lui C satisfăcând ecuaţiile:*

$$\begin{cases} \frac{dx}{ds} = e_1 \\ \frac{de_1}{ds} = h_1 e_1 + k_1 e_2 \\ \frac{de_2}{ds} = -k_1 e_1 + h_2 e_2 + k_2 e_3 \\ \ldots \\ \frac{de_{n-1}}{ds} = -k_{n-2} e_{n-2} + h_{n-1} e_{n-1} + k_{n-1} e_n \\ \frac{de_n}{ds} = -k_{n-1} e_{n-1} + h_n e_n \end{cases}$$

unde:

(i) funcţiile $k_1(s), \ldots, k_{n-1}(s)$ sunt cu valori reale, $k_1 > 0, \ldots, k_{n-2} > 0$

(ii) funcţiile $h_1(s), \ldots, h_n(s)$ sunt cu valori în E şi au părţile reale nule.

Funcţiile $k_1, \ldots, k_{n-1}$ se numesc *curburi primare* iar funcţiile $h_1, \ldots, h_n$ se numesc *curburi secundare*.

6.30 A) Avem:

$$\begin{cases} \overline{r}'(t) = (-f', f'', -f''') \\ \overline{r}''(t) = \left(-f'', f''', -f^{(iv)}\right) \\ \overline{r}'''(t) = \left(-f''', f^{(iv)}, -f^{(v)}\right) \end{cases}$$

$$\overline{r}' \times \overline{r}'' = \left(f'''^2 - f'' f^{(iv)}, f'' f''' - f' f^{(iv)}, f''^2 - f' f'''\right)$$

$$\|\overline{r}' \times \overline{r}''\|^2 = \left(f'''^2 - f'' f^{(iv)}\right)^2 + \left(f'' f''' - f' f^{(iv)}\right)^2 + \left(f''^2 - f' f'''\right)^2$$

$$\|\overline{r}'\|^2 = f'^2 + f''^2 + f'''^2$$

$$k = \frac{\left[\left(f'''^2 - f'' f^{(iv)}\right)^2 + \left(f'' f''' - f' f^{(iv)}\right)^2 + \left(f''^2 - f' f'''\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}{\left(f'^2 + f''^2 + f'''^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\left(\overline{r}', \overline{r}'', \overline{r}'''\right) = f^{(v)}\left(f' f''' - f''^2\right) + f^{(iv)}\left(f'' f''' - f' f^{(iv)}\right) + f'''\left(f'' f^{(iv)} - f'''^2\right)$$

$$\tau = \frac{f^{(v)}\left(f' f''' - f''^2\right) + f^{(iv)}\left(f'' f''' - f' f^{(iv)}\right) + f'''\left(f'' f^{(iv)} - f'''^2\right)}{\left(f'''^2 - f'' f^{(iv)}\right)^2 + \left(f'' f''' - f' f^{(iv)}\right)^2 + \left(f''^2 - f' f'''\right)^2}.$$

Exemple:

(i) $\overline{r}(t) = (-\cos t, -\sin t, \cos t)$

(ii) $\overline{r}(t) = (-\sin t, \cos t, \sin t)$

Nodurile olonome au fost introduse ca extensie în sensul 2-jeturilor a funcţiei periodice f în lucrarea:

Vassiliev, V. A., *Holonomic Links and Smale Principles for Multisingularities*, J. Knot Theory and Its Ramifications, 6(1997), no. 1, 115-123.

B) Din relaţia dată rezultă:

$$f''' = \left(a^2 + b\right) f' + abf$$

$$f^{(iv)} = \left(a^3 + 2ab\right) f' + \left(a^2 b + b^2\right) f$$

$$f^{(v)} = \left(a^4 + 3a^2 b + b^2\right) f' + \left(a^3 b + 2ab^2\right) f$$

şi deci:

$$\left(\overline{r}', \overline{r}'', \overline{r}'''\right) =$$

$$= \begin{vmatrix} -f' & af' + bf & -\left(a^2+b\right) f' - abf \\ -af' - bf & \left(a^2+b\right) f' + abf & -f^{(iv)} \\ -\left(a^2+b\right) f' - abf & \left(a^3 + 2ab\right) f' + \left(a^2 b + b^2\right) f & -f^{(v)} \end{vmatrix} =$$

(prin înmulţirea primei linii cu $(-a)$ şi adunarea la a doua, respectiv înmulţirea primei linii cu $\left(-a^2 - b\right)$ şi adunarea la a treia)

$$= \begin{vmatrix} -f' & af' + bf & -\left(a^2+b\right) f' - abf \\ -bf & bf' & -abf' - b^2 f \\ -abf & abf' & -a^2 bf' - ab^2 f \end{vmatrix} = 0$$

deoarece ultima linie este egală cu a doua înmulţită cu a. Astfel se explică faptul că pentru cele două exemple de mai sus, în care avem $b = -1$ şi $a = 0$, torsiunea este nulă!

Mai general, dacă $f'' = af' + bf + c$, atunci se obţine cu Maple:

$$\left(\overline{r}', \overline{r}'', \overline{r}'''\right) = -c\left[-2ab^2 f'^2 + 2a^2 b^2 ff' + 2ab^3 f^2 + cf'\left(a^4 + b^2 + 3a^2 b\right) + abcf\left(a^2 + 2b\right)\right]$$

ceea ce dă prin particularizarea $c = 0$ cazul precedent.

6.31 (i) Fie $m(s_0)$ centrul sferei osculatoare. Notând:

$$m(s_0) = c(s_0) + \alpha\overline{t}(s_0) + \beta\overline{n}(s_0) + \gamma\overline{b}(s_0)$$

vom determina α, β, γ. Astfel, derivăm funcţia $d(s) =< m - \overline{r}(s), m - \overline{r}(s) >$:

$$\begin{cases} d' = -2 < m - \overline{r}(s), \overline{r}'(s) > \\ d'' = -2 < m - \overline{r}(s), \overline{r}''(s) > +2 < \overline{r}'(s), \overline{r}'(s) > \\ d''' = -2 < m - \overline{r}(s), \overline{r}'''(s) > \end{cases}.$$

Contact optim va fi când vom avea cât mai multe derivate nule în s_0. Avem:

$$d'(s_0) = 0 \Leftrightarrow < m - \overline{r}(s_0), \overline{t}(s_0) >= 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$$

$$d''(s_0) = 0 \Leftrightarrow < m - \overline{r}(s_0), \overline{r}''(s_0) > -1 = 0 \Leftrightarrow \beta k = 1$$

$$d'''(s_0) = 0 \Leftrightarrow < m - \overline{r}(s_0), \overline{r}'''(s_0) >= 0 \Leftrightarrow < m - \overline{r}(s_0), k'\overline{n} - k^2\overline{t} + k\tau\overline{b} >= 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{k'}{k} + k\tau\gamma = 0 \Leftrightarrow \gamma = -\frac{k'(s_0)}{k^2(s_0)\,\tau(s_0)}.$$

(ii) Impunem condiţia ca funcţia $m(s)$ definită la punctul anterior să fie constantă. Deci:

$$\left(\overline{r} + \frac{1}{k}\overline{n} - \frac{k'}{k^2\tau}\overline{b}\right)' = \left[\frac{\tau}{k} - \left(\frac{k'}{k^2\tau}\right)'\right]\overline{b} = \overline{0}$$

ceea ce dă concluzia.

(iii) Din ipoteză rezultă că vectorii $\overline{r}, \overline{r}', \overline{r} \times \overline{r}'$ constituie o bază ortonormată. Avem:

$$\overline{r}'' = < \overline{r}'', \overline{r} > \overline{r} + < \overline{r}'', \overline{r}' > \overline{r}' + < \overline{r}'', \overline{r} \times \overline{r}' > \overline{r} \times \overline{r}'.$$

Deoarece: $< \overline{r}'', \overline{r} >= - < \overline{r}, \overline{r} >= -1$ rezulta: $\overline{r}'' = -\overline{r} + J\overline{r} \times \overline{r}''$ si deci:

$$k^2 = < \overline{r}'', \overline{r}'' >= 1 + J^2.$$

De asemeni: $\overline{n} = \frac{1}{k}\overline{r}'', \overline{b} = \overline{r}' \times \overline{n}$ si $< \overline{r}''', \overline{r} >= 0$ implică:

$$\tau = - < \overline{b}', \overline{n} >= - < \left(\frac{1}{k}\overline{r}' \times \overline{r}''\right)', \frac{1}{k}\overline{r}'' >= -\frac{1}{k^2} < \overline{r}' \times \overline{r}'', \overline{r}'' > + \frac{k'}{k^3} < \overline{r}' \times \overline{r}'', \overline{r}'' >=$$

$$= -\frac{1}{k^2} < \overline{r}' \times \overline{r}''', -\overline{r} + J\overline{r} \times \overline{r}' >= \frac{J'}{k^2}.$$

Ultima egalitate rezultă din faptul că $\overline{r}'''$ este perpendicular pe $\overline{r}$ şi în consecinţă $\overline{r}' \times \overline{r}'''$ este perpendicular pe $\overline{r}' \times \overline{r}$.

Rezolvarea acestui exerciţiu urmăreşte teorema 2.10, p. 20-22 din:

Kuhnel, W., *Differential Geometry: Curves-Surfaces-Manifolds*, Student Mathematical Library, vol. 16, A.M.S., 2002.

CAPITOLUL 7

Suprafeţe: Probleme

7.1 Enunţuri

7.1 Pentru suprafaţa $S: x = u^2 + u + v, y = v^2 + u - v, z = u - v$ curbele de coordonate(u=constant respectiv v=constant) sunt curbe plane.

7.2 Să se arate că intersecţia suprafeţelor $S_1 : x + y + z = 0$, $S_2 : x^2 + xy + y^2 = 2$ se află pe sfera $S : x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

7.3 Se cere planul tangent şi normala la suprafaţa $S : z\left(x^2 + y^2\right) = 1$ în punctul $M\left(1, 1, \frac{1}{2}\right)$.

7.4 Se cere planul tangent şi normala la suprafaţa $S : x = \frac{u^2-v^2}{u^2+v^2}, y = \frac{u^3+v^3}{u^2+v^2}, z = \frac{uv-1}{u^2+v^2}$ în punctul $M\,(u = 1, v = 1)$.

7.5 Se consideră curba C de intersecţie a suprafeţelor $S_1 : x^2+y^2+z^2 = 3$ (sferă centrată în origine), $S_2 : 2x^2 + y^2 - 3z^2 = 0$ (con centrat în origine). Se cere ecuaţia dreptei tangente în $M\,(1, 1, 1)$ la C.

7.6 Pentru suprafaţa $S : x = u + v, y = u - v, z = uv$ se cer:

(i) coordonatele carteziene ale punctelor $M_1\,(u = 2, v = 1)\,, M_2\,(u = 1, v = 2)$

(ii) să se stabilească dacă punctele $M_3\,(4, 2, 3)\,, M_4\,(1, 4, -2)$ aparţin lui S

(iii) ecuaţia implicită.

7.7 Pentru suprafaţa $S : x = u^2 + v, y = u^2 - v, z = uv$ să se arate că:

(i) curbele $u = u_0 \neq 0$ sunt drepte iar curbele $v = v_0$ sunt curbe plane

(ii) curba $u = v$ este curbă plană.

7.8 Se cere suprafaţa cilindrică cu generatoarele paralele cu dreapta d şi având curba directoare C unde:

(i) $d : \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z + 0 \end{cases}, C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ y = 0 \end{cases}$ (cerc)

(ii) $d : \frac{x}{3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{1}, C : \begin{cases} 2x^2 + y^2 - 2z = 0 \\ x + z - 4 = 0 \end{cases}$

(iii) d are vectorul director(direcţia) $\overline{a} = (2, 3, 4)$,

$C : \begin{cases} (x-1)^2 + (y+3)^2 + (z-2)^2 = 25 \\ x + y - z + 2 = 0 \end{cases}$.

7.9 Se cere suprafaţa conică având vârful V şi curba directoare C unde:

(i) $V(0,0,0), C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ x^2 - z^2 = 1 \end{cases}$

(ii) $V(0,0,0), C : \begin{cases} y^2 = x \\ 4x + 3y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$

(iii) $V(1,1,1), C : \begin{cases} \left(x^2 + y^2\right)^2 = xy \\ z = 0 \end{cases}$

(iv) $V(0,-a,0), C : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$.

7.10 Se cere suprafaţa conoidă:

(i) generată de o dreaptă paralelă cu planul $\pi = xOy$, ce se sprijină pe curba C=axa Oz şi dreapta $d : \begin{cases} x - z = 0 \\ x + 2y - 3 = 0 \end{cases}$

(ii) generată de o dreaptă paralelă cu planul $\pi = xOy$, ce se sprijină pe curba C=hiperbola $\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1 \\ y = 2 \end{cases}$ şi dreapta $d : \begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \end{cases}$

(iii) generată de o dreaptă paralelă cu planul $\pi = yOz$, ce se sprijină pe curba $C : \begin{cases} z^2 = 2x \\ 9y^2 = 16xz \end{cases}$ şi dreapta d=axa Ox.

7.11 Fie S o suprafaţă de rotaţie având axa Oz ca axă de rotaţie. Să se arate că ecuaţiile lui S sunt: $\begin{cases} x = \varphi(u)\cos v \\ y = \varphi(u)\sin v \\ z = \psi(u) \end{cases}$ alegând curba meridian în planul xOz astfel $C : \begin{cases} x = \varphi(u) \\ z = \psi(u) \end{cases}$.

Se cere studiul următoarelor suprafeţe după algoritmul:

-primele două forme fundamentale,

-curbura medie şi curbura totală,

-linii remarcabile: asimptotice, de curbură, geodezice.

7.12 Planul determinat de punctul $M_0(x_0, y_0, z_0)$ şi vectorii necoliniari $\overline{a} = (a, a_2, a_3), \overline{b} = (b_1, b_2, b_3)$.

7.13 O suprafaţă de rotaţie cu axa de rotaţie Oz folosind parametrizarea din problema 2.11. Cazuri particulare:

(i) cilindrul circular drept cu R raza bazei,

(ii) curba meridian este parametrizată canonic.
Pentru cazul (ii) să se studieze când:
(iii) curbura medie şi curbura totală sunt constante?
7.14 Sfera de rază R centrată în origine.
2.15 (*Suprafaţa Enneper*) $S : \begin{cases} x = 3u + 3uv^2 - u^3 \\ y = 3v + 3u^2v - v^3 \\ z = 3\left(u^2 - v^2\right) \end{cases}$
7.16 (*Elicoidul*) $S : \begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = hv \end{cases}$ cu $h > 0$ o constantă reală.
7.17 O suprafaţă explicită $S : z = f(x, y)$ folosind notaţiile lui *Monge*: $p = \frac{\partial f}{\partial x}, q = \frac{\partial f}{\partial y}, r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, t = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}$.
7.18 (*Paraboloidul hiperbolic) $S : z = xy$.*
7.19 (*Pseudosfera*) $S : \begin{cases} x = R\sin u\cos v \\ y = R\sin u\sin v \\ z = R\left(\cos u + \ln tg\frac{u}{2}\right) \end{cases}$ pentru $tg\frac{u}{2} > 0$.
7.20 (*Torul*) $T_{R,r} : \begin{cases} x = (R + r\cos u)\cos v \\ y = (R + r\cos u)\sin v \\ z = r\sin u \end{cases}$ cu $0 < r < R$. Torul $T_{R,r}$ se obţine prin rotirea cercului de centru $(R, 0, 0)$ şi rază r din planul xOz în jurul axei Oz.
7.21 (*Banda lui Möbius*) $S : \begin{cases} x = \cos u\left(1 + v\sin\frac{u}{2}\right) \\ y = \sin u\left(1 + v\sin\frac{u}{2}\right) \\ z = v\cos\frac{u}{2} \end{cases}$.
7.22 $S : \begin{cases} x = a(\cos u - v\sin u) \\ y = a(\sin u + v\cos u) \\ z = b(u + v) \end{cases}$ cu $a, b > 0$.
7.23 $S : \begin{cases} x = v\sin\varphi\cos u \\ y = v\sin\varphi\sin u \\ z = v\cos\varphi \end{cases}$ cu $\varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.
7.24 (*Unghiul dintre 2 curbe pe o suprafaţă*) Fie pe suprafaţa S două curbe având tangentele $d\overline{r} = r_u du + r_v dv, \delta\overline{r} = r_u \delta u + r_v \delta v$ într-un punct în care se intersectează. Definim unghiul φ dintre cele 2 curbe în punctul comun prin:

$$\cos\varphi = \frac{< d\overline{r}, \delta\overline{r} >}{\|d\overline{r}\|\|\delta\overline{r}\|}.$$

Să se arate că:

$$\cos\varphi = \frac{Edu\delta u + F\left(du\delta v + \delta u dv\right) + Gdv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\cdot\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}}.$$

7.25 Pe paraboloidul $S : x^2 + y^2 = 2\rho z$ se dau curbele $C_1 : x = y, C_2 : z = a$. Se cere unghiul dintre cele două curbe, cu a, ρ constante nenule.

7.26 Pe suprafaţa $S : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = u\left(1 + v\right) \end{cases}$ se cere unghiul dintre curbele coordonate şi unghiurile dintre curba $C : u + v = 0$ şi curbele coordonate.

7.27 (i) Folosind ecuaţiile parametrice de la problema 2.11 să se obţină următoarea formulă pentru curbura totală a suprafeţelor de rotaţie cu axa Oz ca axă de rotaţie:

$$K = \frac{\psi'\left(\varphi'\psi'' - \varphi''\psi'\right)}{\varphi\left(\left(\varphi'\right)^2 + \left(\psi'\right)^2\right)^2}$$

(ii) Folosind formula precedentă se cer suprafeţele de rotaţie având curbura totală constantă negativă.

7.28 Se cere locul geometric al punctelor parabolice ale suprafeţei S : $\begin{cases} x = u + v \\ y = uv \\ z = u^3 + v^3 \end{cases}$.

7.29 Să se arate că toate punctele suprafeţei $S : x + y = z^3$ sunt parabolice.

7.30 Să se arate că toate punctele suprafeţei $S : \begin{cases} x = shu \\ y = chu\cos v \\ z = chu\sin v \end{cases}$ sunt hiperbolice.

7.31 (*Suprafeţe Ţiţeica*) O suprafaţă S se numeşte *suprafaţă Ţiţeica* dacă:

a) curbura totală K este nenulă pe S

b) $\frac{K}{d^4}$ este o constantă unde d este distanţa de la origine la planul tangent în punctul curent al lui S.

Să se arate:

(i) sfera este suprafaţă Ţiţeica.

(ii) $S : \begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = \frac{1}{uv} \end{cases}$ este suprafaţă Ţiţeica.

(iii) Pentru o suprafaţă Ţiţeica având curbura totală negativă liniile asimptotice sunt curbe Ţiţeica.

7.32 (*Expresii ale curburii totale*) (i) Fie o suprafaţă în *coordonate semi-geodezice*(sau *coordonate polare geodezice*) adică forma I-a fundamentală are expresia $ds^2 = g = dr^2 + G(r,\varphi)\,d\varphi^2$. Să se arate că $K = -\frac{\partial_r^2\sqrt{G}}{\sqrt{G}}$. Să se studieze cazul $K = -1$.

(ii) Mai general, să se arate că pentru o parametrizare ortogonală i.e. $F = 0$, avem:

$$K = -\frac{1}{2\sqrt{EG}}\left[\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}\right)_v + \left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)_u\right]$$

unde indicele inferior reprezintă variabila în raport cu care se derivează.

(iii) (*Reţele Cebîşev*) O parametrizare a unei suprafeţe pentru care $g_{11} = g_{22} = 1, g_{12} = \cos\varphi$ se numeşte *reţea Cebîşev*. Să se arate că:

$$K = -\frac{1}{\sin\varphi}\frac{\partial^2\varphi}{\partial u\partial v}.$$

7.33 Fie o suprafaţă de rotaţie de ecuaţie $S : x^2 + y^2 = f^2(z)$. Cu parametrizarea $\begin{cases} x = f(u)\cos v \\ y = f(u)\sin v \\ z = u \end{cases}$ să se arate că forma I-a fundamentală este $g = \left(1 + f'^2(u)\right) du^2 + f^2(u)\,dv^2$ iar curbura totală este $K = -\frac{f''(u)}{f(u)\left(1+f'^2(u)\right)^2}$. Să se studieze cazul $K = -1$. Să se calculeze K în cazul sferei de rază R când $f(u) = \sqrt{R^2 - u^2}$.

7.34 Fie o suprafaţă de rotaţie de ecuaţie $S : z = f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$. Cu parametrizarea $\begin{cases} x = u\cos v \\ y = u\sin v \\ z = f(u) \end{cases}$ să se arate că forma I-a fundamentală este $g = \left(1 + f'^2(u)\right) du^2 + u^2 dv^2$ iar curbura totală este $K = -\frac{1}{u\sqrt{1+f'^2(u)}}\frac{d}{du}\left(\frac{1}{\sqrt{1+f'^2(u)}}\right) = -\frac{\varphi'(u)}{2u}$ cu notaţia $\varphi(u) = \frac{1}{1+f'^2(u)}$. Să se studieze cazurile $K = -1$ şi $K = 0$.

7.35 Fie S un domeniu în $\mathbb{R}^2$ considerat ca suprafaţă şi pentru care forma I-a fundamentală este conformă cu metrica lui $\mathbb{R}^2$ adică $g_{ij} = E\delta_{ij} = e^{2v}\delta_{ij}$. Presupunând $E = E(r), v = v(r)$ să se arate că:

$$K = -\frac{1}{2E^2}\left(E''(r) + \frac{1}{r}E'(r)\right)^2 = -\left(v''(r) + \frac{1}{r}v'(r)\right)e^{-2v}.$$

(i) Să se studieze cazul $K = -1$.

(ii) Se cere K pentru $g_{ij} = \frac{4}{(1-r^2)^2}\delta_{ij}$.

7.36 Pentru suprafaţa $S : z = f(x, y)$ şi punctul $p = (x, y, f(x, y))$ să se arate că:

$$K(p) = \left(1 + \|\nabla f(x, y)\|^2\right)^{-2} \det\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}\right)(x, y).$$

7.37 Să se arate că simbolii Christoffel pentru suprafaţa $S : \overline{r} = \overline{r}\left(u^1, u^2\right)$ sunt daţi de relaţia:

$$\begin{pmatrix} \Gamma^1_{ij} \\ \Gamma^2_{ij} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_{1j}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{i1}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^1} \\ \frac{\partial g_{2j}}{\partial u^i} + \frac{\partial g_{i2}}{\partial u^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial u^2} \end{pmatrix}.$$

7.38 (i) Se dă suprafaţa S în coordonatele semigeodezice, conform exerciţiului 2.32(i). Se cer simbolii Christoffel.

(ii) Să se aplice calculul precent la elicoid.

(iii) Se cer simbolii Christoffel pentru o reţea Cebîşev, conform exerciţiului 2.32(iii).

7.39 (*Aplicaţii conforme*) Fie un domeniu simplu conex $W \subset \mathbb{C}$. Aplicaţia $X : W \to I\!R^3$ se numeşte *conformă* dacă:

$$\|\frac{\partial X}{\partial x}\|^2 - \|\frac{\partial X}{\partial y}\|^2 =< \frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y} >= 0.$$

Să se studieze proprietăţile suprafeţei $S = X(W)$.

7.40 (*Reprezentarea Weierstrass a suprafeţelor minimale*) Folosind exerciţiul anterior să se definească suprafeţele minimale ca imagini de aplicaţii conforme speciale şi să se deducă reprezentarea Weierstrass. Să se deducă o interpretare a aplicaţiei Gauss.

7.41 (*Geometria reprezentării Weierstrass*) Pentru o suprafaţă minimală să se exprime elementele geometrice în funcţie de datele reprezentării Weierstrass.

7.42 (*Exemple de suprafeţe minimale*) (i) Precizând convenabil datele reprezentării Weierstrass să se obţină exemple de suprafeţe minimale.

(ii) Sa se scrie diferite forme ale ecuatiei suprafetelor minimale.

7.43 (*Curbura Gauss a hipersuprafeţelor*) Să se definească curbura Gauss a hipersuprafeţelor şi pentru hipersuprafeţe definite implicit să se dea o formulă de calcul.

7.44 (*Ecuaţii Gauss-Codazzi*) (i) Să se scrie ecuaţiile Gauss-Codazzi pentru suprafeţe conforme.

(ii) Să se aplice la suprafeţe minimale.

7.45 Ca aplicaţie a ecuaţiei Gauss să se arate că nu există o suprafaţă S cu:

(i) forma I-a fundamentală $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi forma a II-a fundamentală $b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) $g = \begin{pmatrix} 1 + \left(u^1\right)^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^1 \end{pmatrix}$.

7.46 (*Formulele Gauss-Weingarten*) Fie suprafaţa $S : \overline{r} = \overline{r}\left(u^1, u^2\right)$. Să se arate că au loc:

$$\begin{cases} \overline{r}_{ij} = \Gamma_{ij}^k \overline{r}_k + b_{ij} \overline{N} \text{ (formulele Gauss)} \\ \overline{N}_i = -b_i^k \overline{r}_k \text{ (formulele Weingarten)} \end{cases}.$$

7.47 (*Geodezice*) O curbă pe suprafaţa S se numeşte *geodezică* dacă vectorul acceleraţie este normal la S. Folosind formula Gauss se cere ecuaţia geodezicelor.

7.2 Soluţii

7.1 Notăm $\overline{r}_{u_0}$ respectiv $\overline{r}_{v_0}$ curba de coordonată $u = u_0 = const.$ respectiv $v = v_0 = const.$ Avem $\overline{r}_{u_0} = \left(u_0^2 + u_0 + v, v^2 + u_0 - v, u_0 v\right)$ de unde rezultă $\overline{r}_{u_0}''' = \overline{0}$ şi deci torsiunea curbei $\overline{r}_{u_0}$ este nulă adică această curbă este plană. Analog $\overline{r}_{v_0}''' = \overline{0}$.

7.2 Fie $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4$. Rezultă, ţinând cont de S_1, $F(x, y, -x - y) = 2\left(x^2 + y^2 + xy - 2\right)$ de unde rezultă că restricţia lui $F(x, y, -x - y)$ pe S_2 este nulă, ceea ce voiam.

7.3 Se observă mai întâi că $M \in S$. Notând $F(x, y, z) = z\left(x^2 + y^2\right) - 1$ avem $\nabla F = \left(2xz, 2yz, x^2 + y^2\right)$ deci $\nabla F(M) = \overline{N}(M) = (1, 1, 2)$ de unde rezultă $T_M S : x + y + x - 3 = 0$ şi normala ca dreaptă: $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1/2}{2}$.

7.4 Coordonatele carteziene ale lui M sunt $(0, 1, 0)$. Avem

$$\begin{cases} \overline{r}_u = \left(\frac{4uv^2}{\left(u^2+v^2\right)^2}, \frac{u\left(u^3+3uv^2-2v^3\right)}{\left(u^2+v^2\right)^2}, \frac{-u^2v+2u+v^3}{\left(u^2+v^2\right)^2}\right) \\ \overline{r}_v = \left(\frac{-4u^2v}{\left(u^2+v^2\right)^2}, \frac{v\left(v^3+3vu^2-u^3\right)}{\left(u^2+v^2\right)^2}, \frac{-v^2u+2v+u^3}{\left(u^2+v^2\right)^2}\right) \end{cases}$$ de unde rezultă

$$\begin{cases} \overline{r}_u(M) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ \overline{r}_v(M) = \left(-1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \end{cases}$$ şi deci $T_M S : \begin{vmatrix} x - 0 & y - 1 & z - 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = 0$, în final

$T_M S : -y+z+1=0$ (deci Ox este paralelă cu $T_M S$!). Normala ca dreaptă este: $\frac{x}{0}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{1}$.

7.5 Se observă mai întâi că $M \in C = S_1 \cap S_2$. Prin urmare, tangenta căutata este $T_M C = T_M S_1 \cap T_M S_2$. Notând $F_1(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-3, F_2(x,y,z) = 2x^2+y^2-3z^2$ avem $\nabla F_1 = 2(x,y,z), \nabla F_2 = 2(2x,y,-3z)$ şi deci (până la factorul de proporţionalitate) $\nabla F_1(M) = (1,1,1), \nabla F_2(M) = (2,1,-3)$. Obţinem $T_M S_1 : x+y+z-3=0, T_M S_2 : 2x+y-3z=0$ şi tangenta cerută apare ca intersecţia a două plane $T_M C : \begin{cases} x+y+z-3=0 \\ 2x+y-3z=0 \end{cases}$.
Altfel: vectorul director al dreptei tangente este $\nabla F_1(M) \times \nabla F_2(M) = (-4,5,-1)$ de unde $T_M C : \frac{x-1}{-4}=\frac{y-1}{5}=\frac{z-1}{-1}$.

7.6 (i) $M_1(3,2,1), M_2(3,-1,2)$ (ii) $M_3 \in S$ deoarece sistemul $\begin{cases} u+v=4 \\ u-v=2 \\ uv=3 \end{cases}$ are soluţia $u=3, v=1, M_4 \notin S$ deoarece sistemul $\begin{cases} u+v=1 \\ u-v=4 \\ uv=-2 \end{cases}$ este incompatibil. (iii) Din $\begin{cases} x=u+v \\ y=u-v \end{cases}$ rezultă $\begin{cases} u=\frac{x+y}{2} \\ v=\frac{x-y}{2} \end{cases}$ şi deci $z=\frac{1}{4}\left(x^2-y^2\right)$. Deci $S : x^2-y^2-4z=0$.

7.7 (i) $\overline{r}^{u_0}(v) = \left(u_0^2+v, u_0^2-v, u_0 v\right)$ şi eliminând v obţinem $(v=)\,\frac{x-u_0^2}{1} = \frac{y-u_0^2}{-1} = \frac{z}{u_0}$ care este o dreaptă ce trece prin punctul $M\left(u_0^2, u_0^2, 0\right)$ şi are vectorul director $\overline{a} = (1,-1,u_0) \neq \overline{0}$.

Avem $\overline{r}^{v_0}(u) = \left(u^2+v_0, u^2-v_0, uv_0\right)$ de unde $\frac{d^3}{du^3}\overline{r}^{v_0} = \overline{0}$ ceea ce dă concluzia.

(ii) $\overline{r}^{u=v}(u) = \left(u^2+u, u^2-u, u^2\right)$ de unde $\frac{d^3}{du^3}\overline{r}^{u=v} = \overline{0}$ ceea ce voiam.

7.8 Numim *suprafaţă cilindrică* o suprafaţă generată de o dreaptă G ce se deplasează în spaţiu paralel cu o direcţie fixă şi sprijinindu-se pe o curbă fixă C. Dreapta G se numeşte *generatoare* iar C se numeşte *curba directoare*.

(i) Generatoarele fiind paralele cu d au ecuaţia $G : \begin{cases} x+y+z=\alpha \\ x+2y+3z=\beta \end{cases}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Punem condiţia ca G să se sprijine pe C adică sistemul format din ecuaţiile lui G si C să fie compatibil $\begin{cases} x+y+z=\alpha \\ x+2y+3z=\beta \\ y=0 \\ x^2+y^2+z^2=2 \end{cases}$. Din primele 3 relaţii avem $\begin{cases} x=\frac{3\alpha-\beta}{2} \\ z=\frac{\beta-\alpha}{2} \end{cases}$ care înlocuite în ultima relaţie dau *condiţia de*

compatibilitate: $(\beta-\alpha)^2+(3\alpha-\beta)^2=8$ şi înlocuind α,β din ecuaţiile lui G în condiţia de compatibilitate rezultă ecuaţia lui $S:(2z+y)^2+(2x+y)^2=8$.

(ii) Scriem $d:\begin{cases} x-3z=0 \\ y-2z=0 \end{cases}$ de unde $G:\begin{cases} x-3z=\alpha \\ y-2z=\beta \end{cases}$. Din sistemul $G\cap C$ obţinem $\begin{cases} x=3+\frac{\alpha}{4} \\ y=\beta+2-\frac{\alpha}{2} \\ z=1-\frac{\alpha}{4} \end{cases}$ ce dă condiţia de compatibilitate: $2\left(3+\frac{\alpha}{4}\right)^2+\left(\beta+2-\frac{\alpha}{2}\right)^2=2\left(1-\frac{\alpha}{4}\right)$ şi suprafaţa $S:(x-3z+12)^2+2(-x+2y-z+4)^2=4(-x+3z+4)$.

(iii) d are direcţia $\overline{a}=(2,3,4)$ deci $G:\frac{x-x_0}{2}=\frac{y-y_0}{3}=\frac{z-z_0}{4}$ sau $G:\begin{cases} 3x-2y=\alpha \\ 2x-z=\beta \end{cases}$. Din sistemul $G\cap C$ obţinem $\begin{cases} x=\alpha-2\beta-4 \\ y=\alpha-3\beta-6 \\ z=2\alpha-5\beta-8 \end{cases}$ şi condiţia de compatibilitate: $(\alpha-2\beta-5)^2+(\alpha-3\beta-3)^2+(2\alpha-5\beta-10)^2=25$ ceea ce dă suprafaţa $S:(-x-2y+2z-5)^2+(-3x-2y+3z-3)^2+(-4x-4y+5z-10)^2=25$.

7.9 Numim *suprafaţă conică* o suprafaţă generată de o dreaptă G ce trece printr-un punct fix V şi se sprijină pe o curbă fixă C. Denumiri: *G-generatoare*, *V-vârf*, *C-curba directoare*.

(i) Generatoarele trecând prin V au ecuaţia $G:\frac{x-0}{\alpha}=\frac{y-0}{\beta}=\frac{z-0}{1}$ adică $G:\begin{cases} x=\alpha z \\ y=\beta z \end{cases}$. Din sistemul $G\cap C$ obţinem condiţia de compatibilitate $3\alpha^2-5\beta^2-1$ şi suprafaţa $S:3x^2-5y^2-z^2=0$.

(ii) Generatoarele au aceeaşi ecuaţie cu cea de la punctul precedent. Condiţia de compatibilitate $4\alpha^2+3\alpha\beta+2\alpha-\beta^2=0$ dă suprafaţa $S:4x^2+3xy+3xz-y^2=0$.

(iii) Generatoarele $G:\frac{x-1}{\alpha}=\frac{y-1}{\beta}=\frac{z-1}{1}$ sau încă $G:\begin{cases} x=\alpha(z-1)+1 \\ y=\beta(z-1)+1 \end{cases}$ dau relaţia de compatibilitate $\left[(1-\alpha)^2+(1-\beta)^2\right]^2=(1-\alpha)(1-\beta)$ de unde rezultă suprafaţa $S:\left[(z-x)^2+(z-y)^2\right]^2=(z-x)(z-y)(z-1)^2$.

(iv) Generatoarele $G:\frac{x-0}{\alpha}=\frac{y+a}{\beta}=\frac{z-0}{1}$ sau încă $G:\begin{cases} x=\alpha z \\ y=\beta z-a \end{cases}$ dau relaţia de compatibilitate $(a+2)^2\left(\alpha^2+1\right)+(2\beta-a)^2=4(\beta+1)^2$ de unde rezultă suprafaţa $S:(a+2)^2\left(x^2+z^2\right)+(2y+2a-az)^2=4(y+z+a)^2$.

7.10 Numim *suprafaţă conoidă cu plan director* o suprafaţa generată de

o dreaptă G ce se deplasează în spaţiu, paralel cu un plan π şi sprijinindu-se pe o dreaptă fixă d şi o curbă fixă C. Denumiri: *G-generatoare*, *π-plan director*.

(i) Generatoarea G se gândeşte ca fiind intersecţia a doua plane: unul paralel cu π (deci de ecuaţie $\pi_1 : z = \alpha$) şi altul din fascicolul de plane ce conţine $Oz : \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$, deci al doilea plan are ecuaţia $\pi_2 : x + \beta y = 0$. Din $G \cap d$ obţinem relaţia de compatibilitate $\alpha\beta - 2\alpha - 3\beta = 0$ şi suprafaţa $S : z(x + 2y) - 3x = 0$.

(ii) Generatoarea G este intersecţia a două plane, unul paralel cu π (deci are ecuaţia $\pi_1 : z = \alpha$) şi al doilea din fascicolul de plane ce conţine pe d, deci $\pi_2 : y + \beta(x - 2) = 0$. Din $G \cap C$ obţinem condiţia de compatibilitate $9(\beta - 1)^2 - \alpha^2\beta^2 = 9\beta^2$ şi suprafaţa $S : 9(x + y - 2)^2 - y^2z^2 = 9y^2$.

(iii) Generatoarea G este intersecţia a două plane, unul paralel cu π, deci $\pi_1 : x = \alpha$, şi altul din fascicolul de plane ce conţine pe d, $\pi_2 : y + \beta z = 0$. Din $G \cap C$ obţinem condiţia de compatibilitate $81\beta^4 = 128\alpha$ şi suprafaţa $S : 81y^4 - 128xz^2 = 0$.

7.11 Numim *suprafaţă de rotaţie* o suprafaţă generată de rotirea, fără alunecare a unei curbe C în jurul unei axe fixe d. Curba C se numeşte *curba meridian* iar d o numim *axa de rotaţie*. În această rotaţie orice punct al lui C descrie un cerc, numit *cerc paralel*, cu centrul pe d.

Presupunând curba meridian C în planul xOz rezultă ecuaţia lui C : $\begin{cases} x = \varphi(u) \\ z = \psi(u) \end{cases}$ şi efectuând rotaţia de unghi v în jurul lui Oz obţinem ecuaţiile cerute.

7.12 Avem $\pi : \overline{r}(u, v) = \overline{r}_0 + u\overline{a} + v\overline{b}$, unde $\overline{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$, de unde rezultă:

$$\overline{r}_u = \overline{a}, \overline{r}_v = \overline{b}, \overline{N} = \frac{\overline{a} \times \overline{b}}{\|\overline{a} \times \overline{b}\|}, \overline{r}_{uu} = \overline{r}_{uv} = \overline{r}_{vv} = \overline{0}$$

şi deci: $E = \|\overline{a}\|^2, F =< \overline{a}, \overline{b} >, G = \|\overline{b}\|^2, L = M = N = 0$. Putem alege vectorii $\overline{a}, \overline{b}$ ca formând o bază ortonormată în π (conform procedeului Gram-Schmidt) şi deci: $E = G = 1, F = 0, H = K = 0$. Toate punctele sunt planare.

7.13

$\overline{r}$	x	y	z
$\overline{r}_u$	$\varphi' \cos v$	$\varphi' \sin v$	ψ'
$\overline{r}_v$	$-\varphi \sin v$	$\varphi \cos v$	0
$\overline{r}_{uu}$	$\varphi'' \cos v$	$\varphi'' \sin v$	ψ''
$\overline{r}_{uv}$	$-\varphi' \sin v$	$\varphi' \cos v$	0
$\overline{r}_{vv}$	$-\varphi \cos v$	$-\varphi \sin v$	0
$\overline{N}$	$\frac{-\psi' \cos v}{\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}}$	$\frac{-\psi' \sin v}{\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}}$	$\frac{\varphi'}{\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}}$

$$\begin{cases} E = \varphi'^2 + \psi'^2, F = 0, G = \varphi^2, EG - F^2 = \varphi^2 \left(\varphi'^2 + \psi'^2\right) \\ L = \frac{\varphi'\psi'' - \varphi''\psi'}{\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}}, M = 0, N = \frac{\varphi\psi'}{\sqrt{\varphi'^2+\psi'^2}} \end{cases}.$$

$$H = \frac{\psi'\left(\varphi'^2 + \psi'^2\right) - \varphi\left(\varphi'\psi'' - \varphi''\psi'\right)}{2\varphi\left(\varphi'^2 + \psi'^2\right)^{\frac{3}{2}}}, K = \frac{\psi'\left(\varphi'\psi'' - \varphi''\psi'\right)}{\varphi\left(\varphi'^2 + \psi'^2\right)^2}.$$

Cazuri particulare:

(i) Cilindrul circular drept

Luăm $\varphi(u) = 1, \psi(u) = Ru$ şi obţinem:

$$\begin{cases} E = R^2, F = 0, G = 1, EG - F^2 = R^2 \\ L = M = 0, N = 1 \end{cases}$$

$$H = \frac{1}{2}, K = 0.$$

(ii) Presupunem curba meridian parametrizată canonic, deci:

$$\varphi'^2 + \psi'^2 = 1. \qquad (*)$$

Avem:

$$E = 1, F = 0, G = \varphi^2, EG - F^2 = \varphi^2$$

$$L = \varphi'\psi'' - \varphi''\psi', M = 0, N = \varphi\psi'$$

$$H = \frac{\psi' - \varphi\left(\varphi'\psi'' - \varphi''\psi'\right)}{2\varphi}, K = \frac{\psi'\left(\varphi'\psi'' - \varphi''\psi'\right)}{\varphi}.$$

Derivând relaţia $(*)$ obţinem $\varphi'\varphi'' + \psi'\psi'' = 0$ de unde:

$$\varphi'' = -\frac{\psi'\psi''}{\varphi'}, \psi'' = -\frac{\varphi'\varphi''}{\psi'}.$$

Înlocuind φ'' în expresia precenta a lui H şi ψ'' în expresia precedentă a lui K obţinem:

$$H = \frac{\varphi'\psi' + \varphi\psi''}{2\varphi\varphi'} = \frac{(\varphi\psi')'}{(\varphi^2)'}, K = -\frac{\varphi''}{\varphi}.$$

(iii) Deci pentru o suprafaţă de rotaţie având curbura medie constantă $H = H_0$ avem ecuaţia diferenţială: $(\varphi\psi')' = H_0 \left(\varphi^2\right)'$ care se integrează: $\varphi\psi' = H_0\varphi^2 + C$ cu C constantă reală. Alegând $C = 0$ şi simplificând prin φ avem $\psi' = H_0\varphi$.

Analog pentru o suprafaţă de rotaţie având curbura totală constantă $K = K_0$ avem ecuaţia diferenţială de ordinul doi: $\varphi'' + K_0\varphi = 0$ cu următoarea soluţie generală depinzând de constatele reale a, b :

$$\varphi(u) = \begin{cases} a\cos\left(\sqrt{K_0}u\right) + b\sin\left(\sqrt{K_0}u\right), & pt.K_0 > 0 \\ au + b, |a| \leq 1, \quad pt.K_0 = 0 \\ ach\left(\sqrt{-K_0}u\right) + bsh\left(\sqrt{-K_0}u\right), & pt.K_0 < 0 \end{cases}.$$

Examplu: $K_0 = 0$. Avem:
-cilindru circular de rază $R = b$ dacă $a = 0$
-plan ortogonal pe axa de rotaţie dacă $|a| = 1$
-con circular dacă $0 < |a| < 1$.

7.14 Aplicăm formulele obţinute la exerciţiul anterior cu: $\varphi(u) = R\cos u, \psi(u) = R\sin u$.

$$\begin{cases} E = R^2, F = 0, G = R^2\cos^2 u, EG - F^2 = R^4\cos^2 u \\ L = R, M = 0, N = R\cos^2 u \end{cases}.$$

$$H = \frac{1}{R}, K = \frac{1}{R^2}.$$

Toate punctele sunt ombilicale şi eliptice. Pe sferă nu avem linii asimptotice şi orice curbă este linie de curbură.

7.15

$\overline{r}$	x	y	z
$\overline{r}_u$	$3\left(1 + v^2 - u^2\right)$	$6uv$	$6u$
$\overline{r}_v$	$6uv$	$3\left(1 + u^2 - v^2\right)$	$-6v$
$\overline{r}_{uu}$	$-6u$	$6v$	6
$\overline{r}_{uv}$	$6v$	$6u$	0
$\overline{r}_{vv}$	$6u$	$-6v$	-6
$\overline{N}$	$\frac{-2u}{1+u^2+v^2}$	$\frac{2v}{1+u^2+v^2}$	$\frac{1-u^2-v^2}{1+u^2+v^2}$

$$\begin{cases} E = G = 9\left(1 + u^2 + v^2\right)^2, F = 0, EG - F^2 = 81\left(1 + u^2 + v^2\right)^4 \\ L = 6, M = 0, N = -6 \end{cases}.$$

$$H = 0, K = \frac{-4}{9\left(1+u^2+v^2\right)^2}.$$

Deci suprafaţa Enneper este suprafaţă minimală cu toate punctele hiperbolice. Liniile asimptotice sunt: $\begin{cases} u+v = const. \\ u-v = const. \end{cases}$ iar liniile de curbură sunt liniile parametrice: $\begin{cases} u = const. \\ v = const. \end{cases}$.

Fig.6 Suprafaţa Enneper.

7.16

$\overline{r}$	x	y	z
$\overline{r}_u$	$\cos v$	$\sin v$	0
$\overline{r}_v$	$-u\sin v$	$u\cos v$	h
$\overline{r}_{uu}$	0	0	0
$\overline{r}_{uv}$	$-\sin v$	$\cos v$	0
$\overline{r}_{vv}$	$-u\cos v$	$-u\sin v$	0
$\overline{N}$	$\frac{h\sin v}{\sqrt{u^2+h^2}}$	$\frac{-h\cos v}{\sqrt{u^2+h^2}}$	$\frac{u}{\sqrt{u^2+h^2}}$

$$\begin{cases} E = 1, F = 0, G = u^2+h^2, EG-F^2 = u^2+h^2 \\ L = 0, M = -\frac{h}{\sqrt{u^2+h^2}}, N = 0 \end{cases}.$$

$$H = 0, K = \frac{-h^2}{\left(h^2+u^2\right)^2}$$

de unde rezultă că elicoidul este suprafaţă minimală cu toate punctele hiperbolice.

Liniile asimptotice sunt liniile parametrice: $\begin{cases} u = const. \\ v = const. \end{cases}$ iar liniile de curbură: $v = \pm \int\limits_{u_0}^{u} \frac{dt}{\sqrt{h^2+t^2}}$.

7.17

$\overline{r}$	x	y	z
$\overline{r}_u$	1	0	p
$\overline{r}_v$	0	1	q
$\overline{r}_{uu}$	0	0	r
$\overline{r}_{uv}$	0	0	s
$\overline{r}_{vv}$	0	0	t
$\overline{N}$	$\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$	$\frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$	$\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$

$$\begin{cases} E = 1+p^2, F = pq, G = 1+q^2, EG - F^2 = 1+p^2+q^2 \\ L = \frac{r}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, M = \frac{s}{\sqrt{1+p^2+q^2}}, N = \frac{t}{\sqrt{1+p^2+q^2}} \end{cases}.$$

$$H = \frac{\left(1+p^2\right) t - 2pqs + \left(1+q^2\right) r}{2\left(1+p^2+q^2\right)^{\frac{3}{2}}}, K = \frac{rt - s^2}{\left(1+p^2+q^2\right)^2}.$$

7.18 Aplicăm exerciţiul precedent:

$$\begin{cases} p = y, q = x, r = t = 0, s = 1 \\ E = 1+y^2, F = xy, G = 1+x^2 \\ L = N = 0, M = \frac{1}{\sqrt{1+x^2+y^2}} \end{cases}.$$

$$H = \frac{-2xy}{\left(1+x^2+y^2\right)^{\frac{3}{2}}}, K = \frac{-1}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}$$

deci toate punctele sunt hiperbolice. Linie asimptotică este doar: $v = const.$ iar linii de curbură sunt liniile parametrice: $\begin{cases} u = const. \\ v = const. \end{cases}$.

7.19

$\overline{r}$	x	y	z
$\overline{r}_u$	$R\cos u \cos v$	$R\cos u \sin v$	$R\frac{\cos^2 u}{\sin u}$
$\overline{r}_v$	$-R\sin u \sin v$	$R\sin u \cos v$	0
$\overline{r}_{uu}$	$-R\sin u \cos v$	$-R\sin u \sin v$	$-R\cos u\frac{1+\sin^2 u}{\sin^2 u}$
$\overline{r}_{uv}$	$-R\cos u \sin v$	$R\cos u \cos v$	0
$\overline{r}_{vv}$	$-R\sin u \cos v$	$-R\sin u \sin v$	0
$\overline{N}$	$-\cos u \cos v$	$-\cos u \sin v$	$\sin u$

$$\left\{\begin{array}{l} E = R^2 ctg^2 u, F = 0, G = R^2 \sin^2 u, EG - F^2 = R^4 \cos^2 u \\ L = -R ctg u, M = 0, N = R \sin u \cos u \end{array}\right. .$$

$$H = \frac{ctg 2u}{R}, K = -\frac{1}{R^2}$$

deci toate punctele sunt hiperbolice.

7.20

$\overline{r}$	x	y	z
$\overline{r}_u$	$-r\sin u\cos v$	$-r\sin u\sin v$	$r\cos u$
$\overline{r}_v$	$-(R+r\cos u)\sin v$	$(R+r\cos u)\cos v$	0
$\overline{r}_{uu}$	$-r\cos u\cos v$	$-r\cos u\sin v$	$-r\sin u$
$\overline{r}_{uv}$	$r\sin u\sin v$	$-r\sin u\cos v$	0
$\overline{r}_{vv}$	$-(R+r\cos u)\cos v$	$-(R+r\cos u)\sin v$	0
$\overline{N}$	$-\cos u\cos v$	$-\cos u\sin v$	$-\sin v$

$$\left\{\begin{array}{l} E = r^2, F = 0, G = (R + r\cos u)^2, EG - F^2 = r^2 (R + r\cos u)^2 \\ L = r, M = 0, N = \cos u (R + r\cos u) \end{array}\right. .$$

$$H = \frac{R + 2r\cos u}{2r(R + r\cos u)}, K = \frac{\cos u}{r(R + r\cos u)}$$

de unde rezultă: curba $u = \pm\frac{\pi}{2}$ are toate punctele parabolice, $\{(u,v) \,|\, \frac{\pi}{2} < u < \frac{3\pi}{2}\}$ are toate punctele hiperbolice, $\{(u,v) \,|\, -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}\}$ are toate punctele eliptice.

7.21

$\overline{r}$	x	y	z
$\overline{r}_u$	$-\sin u\left(1+v\sin\frac{u}{2}\right)+\frac{v}{2}\cos u\cos\frac{u}{2}$	$\cos u\left(1+v\sin\frac{u}{2}\right)+\frac{v}{2}\sin u\cos\frac{u}{2}$	$-\frac{v}{2}\sin\frac{u}{2}$
$\overline{r}_v$	$\cos u\sin\frac{u}{2}$	$\sin u\sin\frac{u}{2}$	$\cos\frac{u}{2}$

$$E = \left(1 + v\sin\frac{u}{2}\right)^2 + \frac{v^2}{4}, F = 0, G = 1.$$

7.22

$\overline{r}$	x	y	z
$\overline{r}_u$	$-a(\sin u+v\cos u)$	$a(\cos u-v\sin u)$	b
$\overline{r}_v$	$-a\sin u$	$a\cos u$	b
$\overline{r}_{uu}$	$a(-\cos u+v\sin u)$	$-a(\sin u+v\cos u)$	0
$\overline{r}_{uv}$	$-a\cos u$	$-a\sin u$	0
$\overline{r}_{vv}$	0	0	0
$\overline{N}$	$\frac{-b\sin u}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\frac{b\cos u}{\sqrt{a^2+b^2}}$	$\frac{-a}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$\begin{cases} E = a^2\left(1+v^2\right)+b^2, F = a^2+b^2 = G, EG-F^2 = a^2v^2\left(a^2+b^2\right) \\ L = \frac{-abv}{\sqrt{a^2+b^2}}, M = 0 = N \end{cases}$$

$$H = -\frac{b}{2av\sqrt{a^2+b^2}}, K = 0$$

7.23

$\overline{r}$	x	y	z
$\overline{r}_u$	$-v\sin\varphi\sin u$	$v\sin\varphi\cos u$	0
$\overline{r}_v$	$\sin\varphi\cos u$	$\sin\varphi\sin u$	$\cos\varphi$
$\overline{r}_{uu}$	$-v\sin\varphi\cos u$	$-v\sin\varphi\sin u$	0
$\overline{r}_{uv}$	$-\sin\varphi\sin u$	$\sin\varphi\cos u$	0
$\overline{r}_{vv}$	0	0	0
$\overline{N}$	$\cos\varphi\cos u$	$\cos\varphi\sin u$	$-\sin\varphi$

$$\begin{cases} E = v^2\sin^2\varphi, F = 0, G = 1 \\ L = -v\sin\varphi\cos\varphi, M = N = 0 \end{cases}$$

$$H = \frac{-ctg\varphi}{2v}, K = 0$$

Liniile asimptotice sunt $u = const.$

7.24 Se aplică direct formula cosinusului şi faptul că $d\overline{r} = \overline{r}_u du + \overline{r}_v dv$.

7.25 Parametrizăm suprafaţa $S : x = u, y = v, z = \frac{1}{2\rho}\left(u^2+v^2\right)$ şi obţinem

$$E = 1+\frac{u^2}{\rho^2}, F = \frac{uv}{\rho^2}, G = 1+\frac{v^2}{\rho^2}.$$

Avem $C_1 : du = dv, C_2 : \delta v = -\frac{u}{v}\delta u$ din derivarea relaţiei $2a\rho = u^2+v^2$ folosind faptul că a si ρ sunt constante. Rezultă $Edu\delta u + F\left(du\delta v + dv\delta u\right) + Gdv\delta v = \left(1-\frac{u}{v}\right)du\delta u = 0$ deoarece la intersecţia curbelor avem $u = v$ datorită lui C_1. Deci cele două curbe sunt perpendiculare pe S.

7.26 Avem:

$$E = 1+\left(1+v\right)^2, F = u\left(1+v\right), G = 1+u^2.$$

Unghiul dintre curbele de coordonate este:

$$\cos\varphi = \frac{F}{\sqrt{EG}} = \frac{u_0\left(1+v_0\right)}{\sqrt{\left(1+u_0^2\right)\left[1+\left(1+v_0^2\right)\right]}}$$

în punctul $M(u_0, v_0) \in S$. Fie ω_1 unghiul dintre Γ^{u_0} şi C respectiv ω_2 unghiul dintre Γ^{v_0} şi C. Pentru Γ^{u_0} avem $du = 0$, pentru Γ^{v_0} avem $dv = 0$ iar pentru C avem $\delta v = -\delta u$. Deci:

$$\cos\omega_1 = \frac{F dv\delta u + G dv(-\delta u)}{\sqrt{G}dv\sqrt{E - 2F + G}\delta u} = \frac{F - G}{\sqrt{G(E - 2F + G)}} \overset{v=-u_0}{=}$$

$$= \frac{u_0 - 2u_0^2 - 1}{\sqrt{\left(1 + u_0^2\right)\left(4u_0^2 - 4u_0 + 3\right)}}$$

$$\cos\omega_2 = \frac{E du\delta u + F du(-\delta u)}{\sqrt{E}du\sqrt{E - 2F + G}\delta u} = \frac{E - F}{\sqrt{E(E - 2F + G)}} \overset{u=-v_0}{=}$$

$$= \frac{2 + 3v_0 + 2v_0^2}{\sqrt{\left(v_0^2 + 2v_0 + 2\right)\left(4v_0^2 + 4v_0 + 3\right)}}.$$

Am folosit faptul că punctul de intersecţie dintre Γ^{u_0} şi C este $M_1(u_0, -u_0)$ iar punctul de intersecţie dintre Γ^{v_0} şi C este $M_2(-v_0, v_0)$.

7.27 (i) Fie forma I-a fundamentală a unei suprafeţe oarecare S:

$$I(du, dv) = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

respectiv forma a II-a fundamentală:

$$II(du, dv) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2.$$

Asociem acestora matricele:

$$I = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}, II = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}$$

şi reamintim că I este inversabilă deoarece $\det I = EG - F^2 > 0$ din condiţia de regularitate a lui S. Reamintim de asemeni, că curbura totală este $K = det\left(II \cdot I^{-1}\right)$ sau încă:

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Atunci, folosind rezultatele de la problema 7.13 obţinem relaţia cerută.

(ii) Considerăm $\psi = \psi(\varphi)$ şi atunci relaţia din problemă devine:

$$K = \frac{\psi'\psi''}{\varphi\left(1 + \psi'^2\right)^2} = -\frac{1}{R^2}$$

sau încă: $\frac{\psi'\psi''}{(1+\psi'^2)^2} = -\frac{\varphi}{R^2}$ care este o ecuaţie cu variabile separate şi deci prin integrare obţinem:

$$\frac{1}{1+\psi'^2} = \frac{\varphi^2}{R^2} + C$$

cu C o constantă reală pe care o alegem de forma $C = 1 - \frac{a^2}{R^2}$. Rezultă:

$$\frac{1}{1+\psi'^2} = \frac{\varphi^2 + R^2 - a^2}{R^2} \Rightarrow 1+\psi'^2 = \frac{R^2}{R^2 - a^2 + \varphi^2} \Rightarrow \psi'^2 = \frac{a^2 - \varphi^2}{R^2 - (a^2 - b^2)}$$

şi deci avem soluţia generală, care este o familie 1-parametrică de suprafeţe, numite *suprafeţe pseudosferice*:

$$\psi_a = \psi_a(\varphi) = \int \sqrt{\frac{a^2 - \varphi^2}{R^2 - (a^2 - \varphi^2)}} d\varphi.$$

Exemplu. Alegem $a = R$ şi deci:

$$\psi = \psi(\varphi) = \int \frac{\sqrt{R^2 - \varphi^2}}{\varphi} d\varphi.$$

Dacă în plus luăm $\varphi = \varphi(u) = R \sin u$ atunci:

$$\psi = \psi(u) = R \int \frac{\cos^2 u}{\sin u} du = R \int \frac{1 - \sin^2 u}{\sin u} du = R\left(\cos u + \ln tg\frac{u}{2}\right) + C_0$$

pentru $tg\frac{u}{2} > 0$ si C_0 constantă reală. Pentru $C_0 = 0$ obţinem *pseudosfera* conform parametrizării de la problema 7.19.

7.28 Avem:

$\overline{r}$	x	y	z
$\overline{r}_u$	1	v	$3u^2$
$\overline{r}_v$	1	u	$3v^2$
$\overline{r}_{uu}$	0	0	$6u$
$\overline{r}_{uv}$	0	1	0
$\overline{r}_{vv}$	0	0	$6v$
$\overline{N}$	$\frac{3(v^3-u^3)}{\sqrt{EG-F^2}}$	$\frac{3(u^2-v^2)}{\sqrt{EG-F^2}}$	$\frac{u-v}{\sqrt{EG-F^2}}$

de unde rezultă:

$$E = 1 + 9u^4 + v^2, F = 1 + uv + 9u^2v^2, G = 1 + u^2 + 9v^4$$

$$L = \frac{6u(u-v)}{\sqrt{EG-F^2}}, M = \frac{3(u^2-v^2)}{\sqrt{EG-F^2}}, G = \frac{6v(u-v)}{\sqrt{EG-F^2}}$$

unde $EG - F^2 = (u-v)^2 + 9(u^2-v^2)^2 + 9(u^3-v^3)^2$. Reamintim că punctele parabolice sunt date de anularea curburii totale K deci satisfac ecuaţia $LN = M^2$. În cazul nostru avem ecuaţia:

$$4uv(u-v)^2 = (u^2-v^2)^2$$

care devine $(u-v)^4 = 0$. Deci locul geometric al punctelor parabolice de pe S este curba $\Gamma^{u=v}(u) = (2u, u^2, 2u^3)$ care, după cum se observă, este intersecţia lui S cu paraboloidul hiperbolic $P_h : z = xy$.

7.29 Parametrizăm $S : x = u, y = v^3 - u, z = v$ şi avem:

$\overline{r}$	x	y	z
$\overline{r}_u$	1	-1	0
$\overline{r}_v$	0	$3v^2$	1
$\overline{r}_{uu}$	0	0	0
$\overline{r}_{uv}$	0	0	0
$\overline{r}_{vv}$	0	$6v$	0
$\overline{N}$	$\frac{-1}{\sqrt{EG-F^2}}$	$\frac{-1}{\sqrt{EG-F^2}}$	$\frac{3v^2}{\sqrt{EG-F^2}}$

de unde rezultă:

$$E = 2, F = -3v^2, G = 1 + 9v^4, EG - F^2 = 2 + 9v^4$$

$$L = M = 0, N = \frac{-6v}{\sqrt{EG-F^2}}$$

şi deci: $LN - M^2 = 0$ ceea ce voiam.

7.30 Avem:

$\overline{r}$	x	y	z
$\overline{r}_u$	chu	$shu\cos v$	$shu\sin v$
$\overline{r}_v$	0	$-chu\sin v$	$chu\cos v$
$\overline{r}_{uu}$	shu	$chu\cos v$	$chu\sin v$
$\overline{r}_{uv}$	0	$-shu\sin v$	$shu\cos v$
$\overline{r}_{vv}$	0	$-chu\cos v$	$-chu\sin v$
$\overline{N}$	$\frac{shu}{\sqrt{ch^2u+sh^2u}}$	$\frac{-chu\cos v}{\sqrt{ch^2u+sh^2u}}$	$\frac{-chu\sin v}{\sqrt{ch^2u+sh^2u}}$

şi deci:

$$E = ch^2u + sh^2u, F = 0, G = ch^2u, EG - F^2 = ch^2u\left(ch^2u + sh^2u\right)$$

$$L = \frac{-1}{\sqrt{ch^2u + sh^2u}}, M = 0, N = \frac{ch^2u}{\sqrt{ch^2u + sh^2u}}$$

de unde rezultă: $LN - M^2 = \frac{-ch^2u}{ch^2u+sh^2u} < 0$ ceea ce voiam.

7.31 (i) Ştim că pentru sfera de rază R avem $K = \frac{1}{R^2} \neq 0$ conform problemei 7.14. De asemeni, conform unei proprietăţi remarcabile a sferei centrate în origine (este esenţial acest fapt!) distanţa de la origine la planul tangent este $d = R$ deoarece raza este perpendiculară pe planul tangent. Prin urmare $\frac{K}{d^4} = \frac{1}{R^2 \cdot R^4} = \frac{1}{R^6} = const.$

(ii) Avem:

$\overline{r}$	x	y	z
$\overline{r}_u$	1	0	$-\frac{1}{u^2v}$
$\overline{r}_v$	0	1	$-\frac{1}{uv^2}$
$\overline{r}_{uu}$	0	0	$\frac{2}{u^3v}$
$\overline{r}_{uv}$	0	0	$\frac{1}{u^2v^2}$
$\overline{r}_{vv}$	0	0	$\frac{2}{uv^3}$
$\overline{N}$	$\frac{v}{\sqrt{u^4v^4+u^2+v^2}}$	$\frac{u}{\sqrt{u^4v^4+u^2+v^2}}$	$\frac{u^2v^2}{\sqrt{u^4v^4+u^2+v^2}}$

de unde rezultă:

$$E = 1 + \frac{2}{u^4v^2}, F = \frac{1}{u^3v^3}, G = 1 + \frac{1}{u^2v^4}, EG - F^2 = \frac{u^4v^4 + u^2 + v^2}{u^4v^4}$$

$$L = \frac{2v}{\sqrt{u^4v^4 + u^2 + v^2}}, M = \frac{1}{\sqrt{u^4v^4 + u^2 + v^2}}, N = \frac{2u}{\sqrt{u^4v^4 + u^2 + v^2}}$$

şi deci:

$$K = \frac{3u^4v^4}{(u^4v^4 + u^2 + v^2)^2}.$$

Ecuaţia planului tangent în punctul curent este $T_pS : v\,(x-u) + u\,(y-v) + u^2v^2\left(z - \frac{1}{uv}\right) = 0$ şi deci:

$$d = \frac{|-uv - uv - uv|}{\sqrt{u^4v^4 + u^2 + v^2}} = \frac{3uv}{\sqrt{u^4v^4 + u^2 + v^2}}.$$

În concluzie:

$$\frac{K}{d^4} = \frac{3}{3^4} = \frac{1}{27} = const.$$

Observaţie: pe suprafaţa dată, curba $u\,(t) = \frac{1}{t}, v\,(t) = \frac{1}{t^2}$ este curba Ţiţeica (i) de la exerciţiul 6.22.

(iii) Reamintim: dată S o suprafaţă având curbura totala negativă şi $c : I \to S, c(t) = (u(t), v(t))$, o curbă pe S are loc *formula lui Enneper*:

$$\tau^2(t) = -K(u(t), v(t)).$$

Fie deci S suprafaţă Ţiţeica având $K < 0$ şi c o linie asimptotică pe S. Din formula Enneper şi proprietatea Ţiţeica rezultă că $\frac{\tau^2}{d^4} = const.$ unde d este distanţa de la origine la planul tangent. Dar c fiind linie asimptotică, planul tangent coincide cu planul osculator şi deci $\frac{\tau}{d^2} = const.$ cu d distanţa de la origine la planul osculator, ceea ce spune că c este curbă Ţiţeica.

7.32 (i) Pentru $K = -1$ avem ecuaţia diferenţiala $\partial_r^2\sqrt{G} = \sqrt{G}$ şi se arată că $\sqrt{G}(0, \varphi) = 0, \partial_r\sqrt{G}(0, \varphi) = 1$. Deci notând $\sqrt{G}(r, \varphi) = x(r)$ avem problema Cauchy:

$$\begin{cases} x''(r) = x'(r) \\ x(0) = 0, x'(0) = 1 \end{cases}$$

cu soluţia unică $x(r) = shr$ şi deci, în final, soluţia unică $G(r, \varphi) = sh^2 r$.

(ii) Teorema Egregium afirmă următoarea expresie a curburii totale:

$$2\sqrt{EG - F^2} \cdot K = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{FE_v - EG_u}{E\sqrt{EG - F^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{2EF_u - FE_u - EE_v}{E\sqrt{EG - F^2}}\right) \quad (*)$$

care pentru $F = 0$ devine relaţia cerută.

Alte expresii ale curburii totale:

-dacă $g_{11} = g_{22}$ şi $g_{12} = 0$ atunci:

$$K = -\frac{\Delta(\ln g_{11})}{2g_{11}}$$

(a se vedea şi prima relaţie de la ex. 2.42)

-dacă $g_{11} = g_{22} = 0$ atunci:

$$K = -\frac{1}{g_{12}}\frac{\partial^2 \ln g_{12}}{\partial u \partial v}.$$

(iii) Din $(*)$ avem:

$$\sqrt{1 - F^2}K = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{F_u}{\sqrt{1 - F^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{-\sin\varphi \cdot \varphi_u}{\sin\varphi}\right)$$

de unde concluzia.

În lucrarea:

Myller, A., *Reţelele lui Cebîşev şi paralelismul lui Levi-Civita*, Mathematica (Cluj), 1(1929), 48-53,
se redă povestea introducerii acestor reţele. Este singura sursă dintr-o bibliografie foarte amplă cercetată de autorul acestei culegeri în care apare această istorie!

Citâm:

"În anul 1878 la congresul Asociaţiunii franceze pentru înaintarea ştiinţelor, geometrul rus Cebîşev a facut o comunicare intitulată <<Sur la coupe des vêtements>>. A arătat atunci cum se poate îmbraca orice suprafaţă cu o singură bucată de stofă.

El consideră stofa ca formată din două rânduri de fire care se încrucişează. Aceste fire sânt înnodate în punctele lor de întretăere astfel că distanţa dintre două puncte consecutive să fie peste tot aceiaşi. Când se deformează stofa, această distanţă rămâne invariabilă, numai unghiul ce fac două fire în punctul lor de întretăere poate să se schimbe.

Dacă consider stofa într'o poziţie deformată oarecare şi iau două fire care se încrucişează ca linii coordonată de origină, atunci un punct oarecare al stofei poate să fie determinat prin două coordonate α şi β care sunt distanţele punctului la liniile coordonată de origină măsurate dealungul firelor ce trec prin acel punct:

$$\alpha = MQ, \qquad \beta = MP.$$

Avem atunci:

$$MM_1 = d\alpha, \qquad MM_2 = d\beta$$

şi prin urmare:

$$(M_1M_2)^2 = ds^2 = d\alpha^2 + d\beta^2 + 2cos\theta d\alpha d\beta$$

unde θ este unghiul M_1MM_2. θ este o funcţie de α, β şi această funcţie depinde de modul în care a fost deformată stofa.

Rezultă că pentru a îmbrăca o suprafaţă cu o singură bucată de stofă trebue deslegat problemul următor de geometrie: Fiind dată o suprafaţă al cărei element liniar este

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

să se facă o schimbare de coordonate, înlocuind variabilele u, v prin altele α, β alese astfel ca elementul liniar să ia forma

$$ds^2 = d\alpha^2 + 2\overline{F}d\alpha d\beta + d\beta^2$$

unde am însemnat $\cos\theta$ prin $\overline{F}(\alpha,\beta)$."

Încheiem această istorioară notând că, deşi este numit "geometru" de către Al. Myller, matematicianul rus P. L. Cebîşev (1821-1894) este celebru în alte domenii ale matematicii:
-crearea teoriei celei mai bune aproximări,
-teoria probabilităţilor,
-teoria numerelor.

7.33 (i) Pentru $K=-1$ avem ecuaţia diferenţială
$f''(u)=f(u)\left(1+(f'(u))^2\right)^2$.

(ii) Rezultatul binecunoscut $K=\frac{1}{R^2}$.

7.34 Pentru $K=-1$ avem $\varphi(u)=u^2+c$ adică $f(u)=\int\sqrt{\frac{1}{u^2+c}-1}du$ care este o integrală eliptică pentru marea majoritate a valorilor lui c. Dar pentru $c=0$ avem:

$$f(u)=\sqrt{1-u^2}-\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt{1-u^2}\right)+\frac{1}{2}\ln\left(1-\sqrt{1-u^2}\right).$$

Pentru $K=0$ avem $\varphi(u)=c$ adică $f'(u)=const.=C_1$ de unde rezultă $f(u)=C_1u+C_2$.

7.35 (i) Pentru $K=-1$ avem ecuaţia diferenţiala $v''(r)+\frac{1}{r}v'(r)=e^{2v(r)}$.

(ii) Obţinem cu formula dată $K=-32\frac{\left(1+2r^2\right)^2}{\left(1-r^2\right)^4}$.

7.36 Calcul imediat.

7.37 O formă mai utilă pentru calcule practice este dată de:

$$\begin{pmatrix}\Gamma_{11}^1\\ \Gamma_{22}^1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{12} & g_{22}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^1}\\ \frac{\partial g_{12}}{\partial u^1}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\Gamma_{12}^1\\ \Gamma_{12}^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{12} & g_{22}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\frac{\partial g_{11}}{\partial u^2}\\ \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}\Gamma_{22}^1\\ \Gamma_{22}^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}g_{11} & g_{12}\\ g_{12} & g_{22}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\frac{\partial g_{12}}{\partial u^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}\\ \frac{1}{2}\frac{\partial g_{22}}{\partial u^2}\end{pmatrix}.$$

7.38 (i) Folosind formulele precente obţinem:

$$\Gamma_{22}^1=-\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial r},\Gamma_{12}^2=\Gamma_{21}^2=\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial r},\Gamma_{22}^2=\frac{1}{2G}\frac{\partial G}{\partial\varphi}$$

şi toţi ceilalţi simboli Christoffel sunt nuli.

(ii) Folosind rezultatele de la exerciţiul 2.16 cu $r = u, \varphi = v$ avem:

$$\Gamma^1_{22} = -u, \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{u}{u^2 + h^2}$$

toţi ceilalţi simboli Christoffel fiind nuli.

(iii) Aplicâand exercitiul anterior avem:

$$\begin{pmatrix} \Gamma^1_{11} \\ \Gamma^1_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin\varphi} \begin{pmatrix} \cos\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial u} \\ -\frac{\partial\varphi}{\partial u} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Gamma^1_{12} \\ \Gamma^2_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \Gamma^1_{22} \\ \Gamma^2_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sin\varphi} \begin{pmatrix} -\frac{\partial\varphi}{\partial v} \\ \cos\varphi \frac{\partial\varphi}{\partial v} \end{pmatrix}.$$

7.39 Fie $\{e_1, e_2\}$ o bază ortonormată în spaţiul tangent $T_{X(z)}S$. Din relaţia de definiţie avem că vectorii $\frac{\partial X}{\partial x}, \frac{\partial X}{\partial y} \in T_{X(z)}S$ sunt ortogonali şi au aceeaşi normă, deci există funcţia $\omega : W \to I\!R$ astfel încât:

$$\frac{\partial X}{\partial x} = e^{\omega} e_1, \frac{\partial X}{\partial y} = e^{\omega} e_2. \tag{1}$$

Rezultă forma I-a fundamentală:

$$I = e^{2\omega} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Fie forma a II-a fundamentală:

$$II = e^{2\omega} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Atunci:

$$H = \frac{h_{11} + h_{22}}{2}, K = \det \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Dar $II = \begin{pmatrix} < \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}, \overline{N} > & < \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y}, \overline{N} > \\ < \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y}, \overline{N} > & < \frac{\partial^2 X}{\partial y^2}, \overline{N} > \end{pmatrix}$ si deci: $h_{11} = e^{-2\omega} < \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}, \overline{N} >$, $h_{22} = e^{-2\omega} < \frac{\partial^2 X}{\partial y^2}, \overline{N} >$ de unde rezultă:

$$H = \frac{e^{-2\omega}}{2} < \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2}, \overline{N} >$$

sau cu notaţia cunoscută $\Delta X = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2}$:

$$H = \frac{e^{-2\omega}}{2} < \Delta X, \overline{N} > \tag{5}$$

unde, ca de obicei: $\overline{N} = \frac{\frac{\partial X}{\partial x}\times\frac{\partial X}{\partial y}}{\|\frac{\partial X}{\partial x}\times\frac{\partial X}{\partial y}\|}$.

O altă proprietate remarcabilă este faptul că ΔX este vector perpendicular pe $\frac{\partial X}{\partial x}$ şi $\frac{\partial X}{\partial y}$. În adevăr, derivând relaţia $<\frac{\partial X}{\partial x},\frac{\partial X}{\partial y}>=0$ în raport cu x şi relaţia $<\frac{\partial X}{\partial x},\frac{\partial X}{\partial x}>=<\frac{\partial X}{\partial y},\frac{\partial X}{\partial y}>$ în raport cu y avem:

$$\begin{cases} <\frac{\partial^2 X}{\partial x^2},\frac{\partial X}{\partial y}> + <\frac{\partial X}{\partial x},\frac{\partial^2 X}{\partial x\partial y}>=0 \\ <\frac{\partial^2 X}{\partial y^2},\frac{\partial X}{\partial y}>=<\frac{\partial^2 X}{\partial x\partial y},\frac{\partial X}{\partial x}> \end{cases}$$

de unde rezultă $\Delta X \perp \frac{\partial X}{\partial y}$. Datorită rolului simetric al variabilelor x, y avem şi $\Delta X \perp \frac{\partial X}{\partial x}$.

Din această ultimă proprietate şi relaţia (5) rezultă că putem scrie: $\Delta X = <\Delta X, \overline{N}> \overline{N} \overset{(5)}{=} 2He^{2\omega}\overline{N}$ sau încă, ţinand cont de expresia lui $\overline{N}$ şi relaţiile (1):

$$\Delta X = 2H\frac{\partial X}{\partial x}\times\frac{\partial X}{\partial y} \tag{6}$$

deoarece e_1, e_2 sunt ortonormaţi.

7.40 Din relaţia (6) de la problema precedentă rezultă că o suprafaţă este minimală dacă şi numai dacă este imaginea unei aplicaţii conforme *armonice* adică satisface, pe lângă condiţia de conformitate, şi condiţia: $\Delta X = \overline{0}$.

Să notăm că din $2H = h_{11} + h_{22} = 0$ rezultă $h_{22} = -h_{11}$ şi deci expresia curburii totale pentru o suprafaţă minimală conformă este, în notaţiile de la problema precedentă:

$$H = -h_{11}^2 - h_2^2.$$

Deci pentru a afla suprafeţe minimale căutăm aplicaţii $X : W \to I\!R^3$ cu proprietăţile:

(Si) X este conformă, ceea ce se poate scrie:

$$\|\frac{\partial X}{\partial x}\|^2 - \|\frac{\partial X}{\partial y}\|^2 - 2i<\frac{\partial X}{\partial x},\frac{\partial X}{\partial y}>=0$$

folosind faptul că un număr complex este nul dacă şi numai dacă sunt nule parţile reală şi imaginară,

(Sii) $\Delta X = \overline{0}$.

Folosind notaţiile consacrate: $\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right), \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)$ obţinem că: $\Delta = 4\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar{z}}$ şi prin urmare cele două condiţii precedente devin:

(i) $\left(\frac{\partial X^1}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial X^2}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial X^3}{\partial z}\right)^2 = 0$

(ii) $\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\left(\frac{\partial X}{\partial z}\right)=\overline{0}$

unde am notat $X=\left(X^{1},X^{2},X^{3}\right)$. Cu notaţia $f=\frac{\partial X}{\partial z}:W\rightarrow\mathbb{C}^{3}$ avem deci sistemul:

(S1) $\left(f^{1}\right)^{2}+\left(f^{2}\right)^{2}+\left(f^{3}\right)^{2}=0$

(S2) $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=\overline{0}$

care admite soluţia

$$f=\left(\frac{1}{2}\left(1-w^{2}\right),\frac{i}{2}\left(1+w^{2}\right),w\right)h$$

cu $w,h:W\rightarrow\mathbb{C}$ functii olomorfe. Reamintim că o funcţie $\varphi:W\subset\mathbb{C}\rightarrow\mathbb{C}$ este *olomorfă* dacă $\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{z}}=0$. În concluzie, obţinem:

$$X\left(z\right)=\operatorname{Re}\left[\int\limits_{z_{0}}^{z}f\left(\zeta\right)d\zeta\right]$$

unde z_0 este punct arbitrar în W iar integrarea se face după o curbă în W ce uneşte z_0 şi z. Relaţia precedentă este faimoasa *reprezentare Weierstrass* a suprafeţelor minimale (alţi autori o numesc reprezentarea Enneper-Weierstrass) apărută în:

Weierstrass, K., *Untersuchungen über die Flächen, deren mittlere Krümmung überall gleich Null ist*, Monatsber. Akad. Wiss. Berlin, 1866, 612-625.

Trebuie de altfel notat că bibliografia relativ la suprafeţe minimale, la care se adaugă recent cea relativ la suprafeţe CMC ("constant mean curvature") este impresionantă!

Fie N polul nord al sferei $S^{2}=\{\overline{x}\in IR^{3};\|x\|=1\}$ şi proiectia stereografică $\tau:S^{2}\backslash\{N\}\rightarrow C$:

$$\tau\left(x^{1},x^{2},x^{3}\right)=\frac{x^{1}+ix^{2}}{1-x^{3}}$$

care este o bijecţie cu inversa:

$$\tau^{-1}\left(z\right)=\frac{1}{1+|z|^{2}}\left(2\operatorname{Re}z,2\operatorname{Im}z,|z|^{2}-1\right).$$

Vom arăta ca $w=\tau\circ\overline{N}$.

În adevăr:

$$\frac{\partial X}{\partial x}=\operatorname{Re}\left(\frac{h}{2}\left(1-w^{2}\right),\frac{ih}{2}\left(1+w^{2}\right),hw\right)$$

$$\frac{\partial X}{\partial y} = -\operatorname{Im}\left(\frac{h}{2}\left(1-w^2\right), \frac{ih}{2}\left(1+w^2\right), hw\right)$$

de unde rezultă:

$$\frac{\partial X}{\partial x} \times \frac{\partial X}{\partial y} =$$

$$= \begin{pmatrix} -\operatorname{Re}\left(\frac{ih}{2}\left(1+w^2\right)\right)\operatorname{Im}(hw) + \operatorname{Re}(hw)\operatorname{Im}\left(\frac{ih}{2}\left(1+w^2\right)\right) \\ \operatorname{Re}\left(\frac{h}{2}\left(1-w^2\right)\right)\operatorname{Im}(hw) - \operatorname{Re}(hw)\operatorname{Im}\left(\frac{h}{2}\left(1-w^2\right)\right) \\ -\operatorname{Re}\left(h\left(1-w^2\right)\right)\operatorname{Im}\left(\frac{ih}{4}\left(1+w^2\right)\right) + \operatorname{Re}\left(\frac{ih}{4}\left(1+w^2\right)\right)\operatorname{Im}\left(h\left(1-w^2\right)\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \operatorname{Im}\left[\frac{ih}{2}\left(1+w^2\right)\overline{hw}\right] \\ \operatorname{Im}\left[\frac{1}{2}\overline{h\left(1-w^2\right)}hw\right] \\ \operatorname{Im}\left[\frac{-i}{4}\overline{h\left(1+w^2\right)}h\left(1-w^2\right)\right] \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}|h|^2\operatorname{Re}\left(\overline{w} + |w|^2 w\right) \\ \frac{1}{2}|h|^2\operatorname{Im}\left(w - |w|^2\overline{w}\right) \\ \frac{1}{4}|h|^2\operatorname{Re}\left(|w|^4 - 1 - \overline{w}^2 + w^2\right) \end{pmatrix} = \frac{|h|^2\left(1+|w|^2\right)}{4\left(1+|w|^2\right)}\begin{pmatrix} 2\operatorname{Re} w \\ 2\operatorname{Im} w \\ |w|^2 - 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{|h|^2\left(1+|w|^2\right)^2}{4}\tau^{-1}\circ w.$$

Deoarece $\tau^{-1}\circ w \in S^2$ rezultă că $\|\tau^{-1}\circ w\| = 1$. Aplicaţia X fiind conformă rezultă despre prima formă fundamentală că avem $g_{12} = g_{21} = 0$ şi:

$$g_{11} = g_{22} = e^{2\omega} = \|\frac{\partial X}{\partial x}\| \cdot \|\frac{\partial X}{\partial y}\| = \|\frac{\partial X}{\partial x} \times \frac{\partial X}{\partial y}\| = \frac{|h|^2\left(1+|w|^2\right)^2}{4}. \quad (7)$$

În concluzie:

$$\overline{N} = \frac{\frac{\partial X}{\partial x} \times \frac{\partial X}{\partial y}}{\|\frac{\partial X}{\partial x} \times \frac{\partial X}{\partial y}\|} = \tau^{-1}\circ w$$

ceea ce voiam. Din acest motiv aplicaţia $w = \tau \circ \overline{N}$ se numeşte *aplicaţia Gauss* a lui X.

Calculele acestei probleme au fost adaptate după volumul:

Fang, Yi; *Lectures on minimal surfaces in* $\mathbb{R}^3$, Proceedings of the Centre for Mathematics and Its Applications, The Australian National University, vol. 35, 1996.

Observaţii.

(i) Condiţia (Sii) spune că cele 3 funcţii componente ale funcţiei vectoriale $\overline{X}$ sunt funcţii armonice; altfel spus funcţia vectorială $\overline{X}$ este armonică!

Generalizarea imediată se referă la funcţii bi-armonice şi pentru aspecte geometrice deosebit de interesante ale acestor funcţii trimitem la:

1) Caddeo, R., Montaldo, S., Oniciuc, C., *Biharmonic submanifolds of* $\mathbb{S}^3$, Internat. J. Math., 12(2001), no. 8, 867-876,

2) Caddeo, R., Montaldo, S., Oniciuc, C., *Biharmonic submanifolds in spheres*, Israel J. Math., 130(2002), 109-123,

3) Caddeo, R., Montaldo, S., Piu, P., *Biharmonic curves on a surface*, Rendiconti di Matematica-Roma, Serie VII, 21(2001), 143-157.

(ii) Prezentăm o versiune a reprezentării Weierstrass adaptată după lucrările:

1) Taimanov, I. A., *Modified Novikov-Veselov equation and differential geometry of surfaces*, Trans. A.M.S., Ser. 2, 179(1997), 133-151. (dg-ga/9511005)

2) Taimanov, I. A., *The Weierstrass representation of closed surfaces in* $I\!R^3$, dg-ga/9710020.

Considerăm perechea de funcţii de o variabilă complexă $\psi = (\psi_1, \psi_2)$, prima funcţie fiind anti-olomorfă iar a doua funcţie olomorfă; deci este satisfăcut sistemul:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \overline{z}} = 0 \end{cases} (*) .$$

Atunci aplicaţia $z \in \mathbb{C} \to \left(X^1(z,\overline{z}), X^2(z,\overline{z}), X^3(z,\overline{z})\right) \in I\!R^3$ dată de:

$$\begin{cases} X^1 + iX^2 = i \int\limits_\gamma \left(\overline{\psi}_1^2 dz' - \overline{\psi}_2^2 d\overline{z}'\right) \\ X^1 - iX^2 = i \int\limits_\gamma \left(\psi_2^2 dz' - \psi_1^2 d\overline{z}'\right) \\ X^3 = - \int\limits_\gamma \left(\psi_2 \overline{\psi}_1 dz' + \psi_1 \overline{\psi}_2 d\overline{z}'\right) \end{cases}$$

reprezintă parametrizarea conformă a unei suprafeţe minimale. Integrala se calculează pe un drum γ unind punctul complex z cu un punct iniţial z_0. Din ecuaţiile $(*)$ rezultă că integranzii sunt forme diferenţiale închise şi deci valoarea integralelor este independentă de drumul γ.

Această reprezentare se generalizează imediat pentru suprafeţe de curbură medie constantă, nu neapărat nulă. Condiţia $(*)$ se înlocuieşte cu:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1}{\partial z} = U\psi_2 \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial \overline{z}} = -U\psi_1 \end{cases} (**)$$

cu "potenţialul" U având valori reale. Atunci fie S suprafaţa cu parametrizarea $\left(X^1, X^2, X^3\right)$ de mai sus. Rezultă prin calcul că avem o parametrizare con-

formă a lui S i.e. forma I-a fundamentală are expresia: $I = D^2(z, \overline{z})\, dz d\overline{z}$ cu:

$$D(z, \overline{z}) = |\psi_1(z, \overline{z})|^2 + |\psi_2(z, \overline{z})|.$$

Curbura totală este:

$$K = -\frac{1}{D^2}\Delta(\log D)$$

iar curbura medie este:

$$H = \frac{2U}{D}$$

de unde rezultă pentru cazul particular $U = 0$ condiţia $(*)$.

Sistemul $(**)$ admite scrierea: $\mathcal{D}\psi = 0$ unde:

$$\mathcal{D} = \begin{pmatrix} 0 & \overline{\partial} \\ -\partial & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$$

cu $\partial = \frac{\partial}{\partial z}, \overline{\partial} = \frac{\partial}{\partial \overline{z}}$. Operatorul $\mathcal{D}$ este numit *operator Dirac* cu potentialul U.

Reprezentarea Weierstrass generalizată $(**)$ este extinsă la suprafeţe în $I\!R^4$ în lucrările:

1) Konopelchenko, B. G., *Weierstrass representation for surfaces in 4D spaces and their integrable deformations via DS hierarchy*, math.DG/9807129

2) Konopelchenko, B. G., Landolfi, G., *Induced surfaces and their integrable dynamics. II. Generalized Weierstrass representations in 4D spaces and deformations via DS hierarchy*, math.DG/9810138.

(iii) O altă reprezentare de tip Weierstrass pentru suprafeţe de curbură medie constantă nenulă apare în:

Kenmotsu, K., *Weierstrass formula for surfaces of prescribed mean curvature*, Math. Ann., 245(1979), 89-99.

Parametrizarea Kenmotsu este dată de formula:

$$\overline{X} = \mathrm{Re}\left(\int_\gamma \eta\overline{\varphi}dz'\right)$$

unde $\overline{\varphi} = \left(1 - f^2, i\left(1 + f^2\right), 2f\right)$ iar funcţiile f, η satisfac condiţia de "compatibilitate":

$$\frac{\partial \log \eta}{\partial \overline{z}} = -\frac{2\overline{f}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}}{1 + |f|^2}. (\#)$$

Pentru această parametrizare curbura medie este:

$$H = -\frac{2\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}}{\overline{\eta}\left(1+|f|^2\right)^2}.$$

Reprezentarea Kenmotsu şi cea generalizată Weierstrass (∗∗) sunt echivalente şi legatura între perechile $(f, \eta), (\psi_1, \psi_2)$ este:

$$f = i\frac{\overline{\psi}_1}{\psi_2}, \eta = i\psi_2^2$$

respectiv:

$$U = -\frac{\eta\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}}{\sqrt{\eta\overline{\eta}}\left(1+|f|^2\right)}.$$

Deşi echivalente, reprezentarea Kenmotsu este mai dificilă în practică datorită condiţiei (#).

7.41 La problema anterioară am obţinut forma I-a fundamentală şi aplicaţia Gauss în funcţie de datele (w, h) ale reprezentării Weierstrass.

Se arată, prin calcul, că pentru o metrică conformă $ds^2 = e^{2\omega}|dz|^2$ avem curbura Gauss:

$$K = -\frac{1}{2e^{2\omega}}\Delta\left(\log e^{2\omega}\right) = -\frac{2}{e^{2\omega}}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\log e^{2\omega}\right).$$

Aplicând formula (7) de la exerciţiul anterior rezultă:

$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\log e^{2\omega}\right) = 2\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\log|h|\right) + 2\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\log\left(1+|w|^2\right)\right) \overset{\log|h| = armonic}{=}$$

$$= 2\frac{\partial}{\partial \overline{z}}\frac{w'\overline{w}}{1+|w|^2} = 2\frac{w'\overline{w}'\left(1+|w|^2\right) - w'\overline{w}w\overline{w}'}{\left(1+|w|^2\right)^2} = \frac{2|w'|^2}{\left(1+|w|^2\right)^2}$$

şi deci:

$$K = -\frac{16|w'|^2}{|h|^2\left(1+|w|^2\right)^4} = -\left[\frac{4|w'|}{|h|\left(1+|w|^2\right)^2}\right]^2.$$

Forma a II-a fundamentală este:

$$\begin{cases} b_{11} = < \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}, \overline{N} > = < \mathrm{Re}\left(f^{1\prime}, f^{2\prime}, f^{3\prime}\right), \overline{N} > \\ b_{22} = -b_{11} \\ b_{12} = < \frac{\partial^2 X}{\partial x \partial y}, \overline{N} > = - < \mathrm{Im}\left(f^{1\prime}, f^{2\prime}, f^{3\prime}\right), \overline{N} > \end{cases}.$$

Avem:

$$b_{11} =< \mathrm{Re}\left[\left(\frac{h'}{2}\left(1-w^2\right), \frac{ih'}{2}\left(1+w^2\right), h'w\right) + \left(-hww', ihww', hw'\right)\right], \overline{N} >=$$

şi după un calcul complicat:

$$b_{11} = -\mathrm{Re}\left(hw'\right).$$

Analog avem:

$$b_{12} = \mathrm{Im}\left(hw'\right)$$

de unde rezultă că pentru o suprafaţă minimală funcţia $b_{11} - ib_{12} = -hw'$ este o funcţie olomorfă. Deoarece:

$$(dz)^2 = (dx)^2 - (dy)^2 + 2idxdy$$

avem:

$$b_{11}(dx)^2 + b_{12}dxdy + b_{22}(dy)^2 = -\mathrm{Re}\left(hw'\right)\left((dx)^2 - (dy)^2\right) + 2\,\mathrm{Im}\left(hw'\right)dxdy =$$

$$= -\mathrm{Re}\left(hw'\right)\mathrm{Re}\,(dz)^2 + \mathrm{Im}\left(hw'\right)\mathrm{Im}\,(dz)^2 = -\mathrm{Re}\left[hw'(dz)^2\right] = -\mathrm{Re}\,(hdwdz).$$

Fie $V \in T_pS$ un vector tangent de normă 1 pe care-l vom scrie:

$$V = e^{-\omega}\left(\cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}\right) = 2\,\mathrm{Re}\left(e^{-\omega}e^{i\theta}\frac{\partial}{\partial z}\right) = e^{-\omega}e^{i\theta}\frac{\partial}{\partial z}e^{-\omega}e^{-i\theta}\frac{\partial}{\partial \overline{z}}$$

de unde rezultă:

$$II(V,V) = -e^{-2\omega}\,\mathrm{Re}\left(hw'e^{2i\theta}\right).$$

Obţinem astfel curburile principale:

$$k_1 = \max_{0\le\theta\le 2\pi} -e^{-2\omega}\,\mathrm{Re}\left(hw'e^{2i\theta}\right) = e^{-2\omega}|hw'| = \frac{4|w'|}{|h|\left(1+|w|^2\right)}$$

$$k_2 = \min_{0\le\theta\le \pi} -e^{-2\omega}\,\mathrm{Re}\left(hw'e^{2i\theta}\right) = -e^{-2\omega}|hw'| = -\frac{4|w'|}{|h|\left(1+|w|^2\right)}$$

şi din relaţia $K = k_1 \cdot k_2$ reobţinem formula lui K de mai sus.

Fie $r(t) = x(t) + iy(t)$ o curbă pe S. Cum $r'(t) = x'(t) + iy'(t)$ folosind expresia de mai sus a formei a II-a fundamentale avem:

$$II\left(r'(t), r'(t)\right) = -\mathrm{Re}\{h(r(t))\,w'(r(t))\left[r'(t)\right]^2\}(dt)^2 =$$

$$= -\operatorname{Re}\{d\left[w\left(r\left(t\right)\right)\right]h\left[r\left(t\right)\right]dr\left(t\right)\}.$$

Reamintim că această curbă $t \to r(t)$ este

(i) *linie asimptotică* dacă $II\left(r'\left(t\right), r'\left(t\right)\right) = 0$

(ii) *linie de curbură* dacă $r'(t)$ este direcţie principală adică dacă $\left[r'\left(t\right)\right]^{-2} II\left(r'\left(t\right), r'\left(t\right)\right)$ este o valoare minimă sau maximă a lui $II\left(v, v\right)$ pe mulţimea vectorilor unitari din $T_{r(t)}S$.

Cu relaţia precedentă obţinem caracterizările:

(i) $r(t)$ este linie asimptotică dacă şi numai dacă
$h\left[r\left(t\right)\right]w'\left[r\left(t\right)\right]\left[r'\left(t\right)\right]^2 \in i\mathbb{R}$

(ii) $r(t)$ este linie de curbură dacă şi numai dacă
$h\left[r\left(t\right)\right]w'\left[r\left(t\right)\right]\left[r'\left(t\right)\right]^2 \in \mathbb{R}$.

Calculele sunt prezentate după aceeaşi monografie folosită la problema precedentă.

7.42 (i)

I) *Catenoidul*

Se obţine luând: $w(z) = z, h(z) = \frac{1}{z^2}$. Avem deci, în notaţiile problemei 7.41:

$$f\left(z\right) = \left(\frac{1-z^2}{2z^2}, \frac{i\left(1+z^2\right)}{2z^2}, \frac{1}{z}\right).$$

Curbura totală este $K = -4\pi$. Catenoidul este o suprafaţă de rotaţie şi efectuând calculele obţinem ecuaţia sa implicită:

$$x^2 + y^2 = ch^2 z$$

şi deci ecuaţiile parametrice:

$$\begin{cases} x = ch u \cos v \\ y = ch u \sin v \\ z = u \end{cases}.$$

Forma I-a fundamentală este:

$$I = ch^2 u\left(du^2 + dv^2\right)$$

iar forma a II-a fundamentala:

$$II = -du^2 + dv^2.$$

Fig.7 Catenoidul.

Se arată că singurele suprafeţe minimale de rotaţie sunt planul şi catenoidul.

II) *Elicoidul*

Dată suprafaţa minimală S cu reprezntarea Weierstrass $\overline{X} = \mathrm{Re}\left(\int\limits_{\gamma} f dz'\right)$ putem asocia lui S o întreagă familie de suprafeţe minimale $S_\theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ cu reprezentarea Weierstrass:

$$\overline{X}_\theta = \mathrm{Re}\left(e^{i\theta}\int\limits_{\gamma} f dz'\right).$$

Suprafaţa $S_{\frac{\pi}{2}}$ se numeşte *suprafaţa conjugată* suprafeţei minimale S.

Elicoidul este suprafaţa minimală conjugată catenoidului şi deci are reprezentarea Weierstrass dată de:

$$f(z) = \left(\frac{i\left(1-z^2\right)}{2z^2}, -\frac{1+z^2}{2z^2}, \frac{i}{z}\right).$$

Pentru geometria elicoidului a se vedea problema 7.16. Se arată că singurele suprafeţe minimale riglate sunt planul şi elicoidul.

III) *Suprafaţa Enneper*

Luăm $h = 1, w(z) = z$ şi deci avem în reprezentarea Weierstrass:

$$f(z) = \left(\frac{1-z^2}{2}, \frac{i\left(1+z^2\right)}{2}, z\right).$$

Pentru geometria suprafeţei Enneper a se vedea problema 7.15.

IV) *Elicoidul răsucit* ("Twisted Elicoid")

Conform lucrării:

Nitsche, J. C. C., *A characterization of the catenoid*, J. Math. Mech., 11(1962), 293-301,

această suprafaţă are parametrizarea:

$$S:\begin{cases} x=u\cos v \\ y=\int\limits_1^u \frac{w^2dw}{\Delta(w)}+u\sin v \\ z=\int\limits_1^u \frac{dw}{\Delta(w)} \end{cases} \quad \text{unde } \Delta(w)=\sqrt{w^4-1}.$$

Avem:

	x	y	z
$\overline{r}_u$	$\cos v$	$\frac{u^2}{\sqrt{u^4-1}}+\sin v$	$\frac{1}{\sqrt{u^4-1}}$
$\overline{r}_v$	$-u\sin v$	$u\cos v$	0
$\overline{r}_{uu}$	0	$-\frac{2u}{(u^4-1)^{\frac{3}{2}}}$	$-\frac{2u^3}{(u^4-1)^{\frac{3}{2}}}$
$\overline{r}_{uv}$	$-\sin v$	$\cos v$	0
$\overline{r}_{vv}$	$-u\cos v$	$-u\sin v$	0
$\overline{N}$	$-\frac{u\cos v}{\sqrt{(EG-F^2)(u^4-1)}}$	$-\frac{u\sin v}{\sqrt{(EG-F^2)(u^4-1)}}$	$\frac{u\sqrt{u^4-1}+u^3\sin v}{\sqrt{(EG-F^2)(u^4-1)}}$

de unde rezultă:

$$E=\frac{2u^2\sin v}{\sqrt{u^4-1}}+\frac{2u^4}{u^4-1}, F=\frac{u^3\cos v}{\sqrt{u^4-1}}, G=u^2$$

$$L=\frac{-1}{\sqrt{EG-F^2}}\left(\frac{2u^2\sin v}{u^4-1}+\frac{2u^4}{(u^4-1)^{\frac{3}{2}}}\right), M=0, N=\frac{u^2}{\sqrt{(EG-F^2)(u^4-1)}}$$

şi deci:

$$(EN-2FM+GL)\sqrt{EG-F^2}=$$

$$=\frac{u^2}{\sqrt{u^4-1}}\left(\frac{2u^2\sin v}{\sqrt{u^4-1}}+\frac{2u^4}{u^4-1}\right)-u^2\left(\frac{2u^2\sin v}{u^4-1}+\frac{2u^4}{(u^4-1)^{\frac{3}{2}}}\right)=0$$

deci această suprafaţă este minimală! Propunem cititorului găsirea reprezentării Weierstrass asociate!

V) *Suprafaţa lui Scherk*

$$S:\begin{cases} x=u \\ y=v \\ z=\ln\frac{\cos v}{\cos u} \end{cases}.$$

Pentru această suprafaţă avem:

$$\begin{array}{llll} & x & y & z \\ \overline{r}_u & 1 & 0 & -tgu \\ \overline{r}_v & 0 & 1 & -tgv \\ \overline{r}_{uu} & 0 & 0 & -\frac{1}{\cos^2 u} \\ \overline{r}_{uv} & 0 & 0 & 0 \\ \overline{r}_{vv} & 0 & 0 & -\frac{1}{\cos^2 v} \\ \overline{N} & \frac{tgu}{\sqrt{\Delta}} & \frac{tgv}{\sqrt{\Delta}} & \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \end{array}$$

$$\begin{cases} E = \frac{1}{\cos^2 u}, F = tgutgv, G = \frac{1}{\cos^2 v}, \Delta := EG - F^2 = \frac{1-\sin^2 u \sin^2 v}{\cos^2 u \cos^2 v} \\ L = \frac{-1}{\cos^2 u\sqrt{\Delta}}, M = 0, N = \frac{-1}{\cos^2 v\sqrt{\Delta}} \end{cases}$$

şi deci:

$$H = \frac{\frac{1}{\cos^2 u} \cdot \frac{-1}{\cos^2 v} - \frac{1}{\cos^2 v} \cdot \frac{-1}{\cos^2 u}}{2\Delta^{3/2}} = 0$$

ceea ce voiam.

VI) *Suprafaţa lui Catalan*

$$S : \begin{cases} x = u - \sin uchv \\ y = 1 - \cos uchv \\ z = 4\sin\frac{u}{2}sh\frac{v}{2} \end{cases}$$

VII) *Suprafaţa lui Henneberg*

$$S : \begin{cases} x = 2shu\cos v - \frac{2}{3}sh\,(3u)\cos\,(3v) \\ y = 2shu\sin v + \frac{2}{3}sh\,(3u)\sin\,(3v) \\ z = 2ch\,(2u)\cos\,(2v) \end{cases}$$

(ii) Avem 3 definiţii echivalente ale suprafeţelor minimale:

(a) imaginea unei imersii conforme armonice

(b) suprafaţă având curbura medie nulă (definiţia cu caracter geometric). Să notăm:

-curbura totală a fost introdusă de Gauss(1777-1855) în 1828

-curbura medie a fost introdusă de Sophie Germain în 1831 şi este folosită, spre exemplu, în teoria elasticităţii

-o altă curbură a fost introdusă de fizicianul român Emanoil Bacaloglu într-un articol din "Zeitschrift der Mathematik und Physik" în 1859.

(c) punct de minim al funcţionalei arie (prima definiţie din punct de vedere istoric, constituie aşa numita *problemă Plateau*).

Legătura între (a) şi (b) este dată de relaţia (6) de la exerciţiul 7.40, a se vedea şi începutul ex. 7.41. Avem deci ecuaţia suprafeţelor minimale,

$H = 0$, sau deoarece:

$$H = \frac{b_{11}g_{22} - 2b_{12}g_{12} + b_{22}g_{11}}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \tag{$*$}$$

avem ecuaţia:

$$b_{11}g_{22} - 2b_{12}g_{12} + b_{22}g_{11} = 0. \tag{1}$$

Să demonstrăm relaţia $(*)$. Reamintim că $H = Tr\left(II \cdot I^{-1}\right)$ şi din:

$$II = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix}$$

rezultă:

$$I^{-1} = \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix}$$

$$II \cdot I^{-1} = \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \begin{pmatrix} b_{11}g_{22} - b_{12}g_{12} & -b_{11}g_{12} + b_{12}g_{11} \\ b_{12}g_{22} - b_{22}g_{12} & b_{22}g_{11} - b_{12}g_{12} \end{pmatrix}$$

de unde concluzia. Cu notaţiile lui Gauss relaţia (1) se scrie:

$$G \cdot L - 2F \cdot M + E \cdot N = 0. \tag{1'}$$

Punctul de pornire al teoriei suprafeţelor minimale îl constituie studiul lui Lagrange (1736-1813) din 1760 al punctelor de minim ale funcţionalei arie, deci definiţia (c) de mai sus, ceea ce dă şi explicaţia denumirii de "minimale". El consideră suprafaţa ca fiind dată explicit $z = f(x, y)$ şi prelucrând ecuaţia Euler-Lagrange a funcţionalei arie ajunge la ecuaţia:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{w}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{w}\right) = 0$$

unde p şi q sunt notaţiile Monge, a se vedea ex. 2.17, iar $w = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$. În final, se ajunge la ecuaţia cu derivate parţiale:

$$f_{xx}\left(1 + f_y^2\right) - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}\left(1 + f_x^2\right) = 0. \tag{2}$$

Astfel, Lagrange observă că o funcţie liniară în x şi y satisface (2) datorită derivatelor de ordin 2 şi deci planul este suprafaţă minimală. În 1915 S. Berstein demonstrează că dată funcţia f de clasă C^2 al cărei grafic este o suprafaţă minimală atunci f este liniară!

Abia în 1776, Meusnier observă că interpretarea geometrică a relaţiei (2) este anularea a ceea ce mai târziu va fi numită curbura medie. Mai precis, un calcul imediat dă expresia:

$$H = \frac{f_{xx}\left(1+f_y^2\right) - 2f_x f_y f_{xy} + f_{yy}\left(1+f_x^2\right)}{2\left(1+f_x^2+f_y^2\right)^{3/2}} \tag{\#}$$

(a se vedea şi exerciţiul 7.17).

Să presupunem acum suprafaţa dată implicit $S : F(x,y,z) = 0$. Din relaţia $F(x,y,f(x,y)) = 0$ rezultă:

$$\begin{cases} f_x = -\frac{F_x}{F_z} \\ f_y = -\frac{F_y}{F_z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} f_{xx} = \frac{F_x(F_{xz}F_z - F_{zz}F_x) - F_z(F_{xx}F_z - F_{xz}F_x)}{F_z^3} \\ f_{xy} = \frac{F_x(F_{yz}F_z - F_{zz}F_y) - F_z(F_{xy}F_z - F_{xz}F_y)}{F_z^3} \\ f_{yy} = \frac{F_y(F_{yz}F_z - F_{zz}F_y) - F_z(F_{yy}F_z - F_{yz}F_y)}{F_z^3} \end{cases}$$

şi înlocuind în (#) obţinem ecuaţia:

$$2(F_{xy}F_xF_y + F_{yz}F_yF_z + F_{zx}F_zF_x) =$$

$$F_{xx}\left(F_y^2+F_z^2\right) + F_{yy}\left(F_z^2+F_x^2\right) + F_{zz}\left(F_x^2+F_y^2\right). \tag{3}$$

Pentru alte amănunte relativ la ecuaţia suprafeţelor minimale a se vedea şi:

a) Griffin, Sarah Field, *Minimal surfaces: a derivation of the minimal surface equation for an arbitrary C^2 coordinate chart*, Missouri J. Math. Sci., 13(2001), no. 3, 145-153.

7.43 Fie în spaţiul $\mathbb{R}^n$ hipersuprafaţa S orientată, cu versorul normalei N. Dat $p \in S$ notăm T_pS spaţiul tangent în p la S şi atunci avem transformarea liniară $W : T_pS \to T_pS, W(v) = -\nabla_v N$ unde prin ∇_v am notat derivata relativ la $v \in T_pS$. Aplicaţia liniară W se numeşte *aplicaţia Weingarten* şi prin definiţie *curbura Gauss* a lui S este determinantul K al acestei aplicaţii liniare.

În cazul $n = 2$ curbura Gauss K a unei curbe C este exact curbura uzuală k dacă luâm N ca fiind normala la C. În cazul înlocuirii lui N cu $(-N)$ avem $K = -k$. În cazul general, dacă n este impar atunci K nu depinde de alegerea lui N iar dacă n este par atunci K îşi schimbă semnul la schimbarea lui N.

Relativ la expresia lui K în cazul hipresuprafeţelor implicite, în lucrarea:

Shin-ichi Nishimura, Masao Hashiguchi, *On the Gaussian curvature of the indicatrix of a Lagrange space*, Rep. Fac. Sci., Kagoshima Univ., 24(1991), 33-41,

la pagina 37 este demonstrat următorul rezultat:

Propoziţie *Fie hipersuprafaţa* $S = \{x \in I\!R^n; f(x) = 0, (\nabla f)(x) \neq 0\}$, *cu* $f \in C^\infty(I\!R^n)$ *şi versorul normalei* $N = -\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}$. *Atunci curbura Gauss a perechii* (S, N) *este:*

$$K = -\frac{\begin{vmatrix} f_{ij} & f_i \\ f_j & 0 \end{vmatrix}}{\|\nabla f\|^{n+1}}$$

unde $f_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}, f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$.

Pentru alte amănunte a se vedea şi lucrările:

(i) M. Hashiguchi, *On a Finsler-geometrical expression of the Gaussian curvature of a hypersurface in an Euclidian space*, Rep. Fac. Sci. Kagoshima Univ., 25(1992), 21-27.

7.44 (i) Fie suprafaţa oarecare S cu forma I-a fundamentală $I = (g_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2}$ şi forma a II-a fundamentală $II = (b_{ij})_{1 \leq i,j \leq 2}$. Conform [**?**, p. 298] avem:
(i) ecuaţia Gauss:

$$\det II = \sum_{i=1}^{2} g_{1r}\{\frac{\partial \Gamma_{22}^r}{\partial u_1} - \frac{\partial \Gamma_{12}^r}{\partial u_2} + \sum_{m=1}^{2}(\Gamma_{22}^m \Gamma_{m1}^r - \Gamma_{12}^m \Gamma_{m2}^r)\}$$

(ii) ecuaţiile Codazzi:

$$\begin{cases} \frac{\partial b_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial b_{22}}{\partial u_2} = \sum\limits_{r=1}^{2}(\Gamma_{11}^r l_{r2} - \Gamma_{12}^r lr1) \\ \frac{\partial b_{22}}{\partial u_1} - \frac{\partial b_{12}}{\partial u_2} = \sum\limits_{r=1}^{2}(\Gamma_{12}^r l_{r2} - \Gamma_{22}^r lr_{r1}) \end{cases}.$$

Reamintim că pentru o suprafaţă conformă avem cf. ex. 7.42:

$$I = e^{2w}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$II = e^{2w}\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{12} & b_{22} \end{pmatrix}$$

de unde rezultă:

$$\begin{cases} \Gamma_{11}^1 = \frac{\partial w}{\partial u_1} \\ \Gamma_{11}^2 = -\frac{\partial w}{\partial u_2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{12}^1 = \frac{\partial w}{\partial u_2} \\ \Gamma_{12}^2 = \frac{\partial w}{\partial u_1} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \Gamma_{22}^1 = -\frac{\partial w}{\partial u_1} \\ \Gamma_{22}^2 = \frac{\partial w}{\partial u_2} \end{cases}$$

şi deci avem:
(i) ecuaţia Gauss:

$$b_{11}b_{22} - (b_{12})^2 = -e^{2w}\Delta w$$

(ii) ecuaţiile Codazzi:

$$\begin{cases} \frac{\partial b_{12}}{\partial u_1} - \frac{\partial b_{11}}{\partial u_2} = -(b_{11} + b_{22})\frac{\partial w}{\partial u_2} \\ \frac{\partial b_{22}}{\partial u_1} - \frac{\partial b_{12}}{\partial u_2} = (b_{11} + b_{22})\frac{\partial w}{\partial u_1} \end{cases}.$$

Dar $b_{11} + b_{22} = 2H$ deci putem scrie ecuaţiile Codazzi:

$$\begin{cases} b_{12,1} - b_{11,2} = -2Hw_2 \\ b_{22,1} - b_{12,2} = 2Hw_1 \end{cases}$$

unde indicele inferior reprezintă variabila în raport cu care se derivează.

(ii) Dacă $H = 0$ ecuaţiile Codazzi devin:

$$\begin{cases} b_{12,1} = b_{11,2} \\ b_{12,2} = -b_{11,1} \end{cases} \tag{1}$$

care sunt exact ecuaţiile Cauchy-Riemann din teoria funcţiilor complexe. Deci există o funcţie armonică m astfel încât:

$$\begin{cases} b_{11} = -b_{22} = m_1 \\ b_{12} = m_2 \end{cases}.$$

Fie funcţiile A, φ aşa încât:

$$\begin{cases} b_{11} = m_1 = A\cos\varphi \\ b_{12} = m_2 = A\sin\varphi \end{cases}.$$

Ecuaţia Gauss devine:

$$A^2 = e^{2w}\Delta w. \, (*)$$

Ecuaţia (1_1) devine:

$$A_2 \cos\varphi - A\sin\varphi\varphi_2 - A_1 \sin\varphi - A\cos\varphi\varphi_1 = 0. \quad (2)$$

Exprimăm faptul că m este funcţie armonică:

$$m_{11} + m_{22} = (A\cos\varphi)_1 + (A\sin\varphi)_2 = 0$$

adică:

$$A_2 \sin\varphi + A\cos\varphi\varphi_2 + A_1 \cos\varphi - A\sin\varphi\varphi_1 = 0. \quad (3)$$

Înmulţind ec. (2) cu $\cos\varphi$, ec. (3) cu $\sin\varphi$ şi adunând avem: $A_2 - A\varphi_1 = 0$ adică:

$$\varphi_1 = \frac{A_2}{A}. \quad (4)$$

Analog, înmulţind ec. (2) cu $(-\sin\varphi)$, ec. (3) cu $\cos\varphi$ şi adunând avem: $A_1 + A\varphi_2 = 0$ adică:

$$\varphi_2 = -\frac{A_1}{A}. \quad (5)$$

Dar ecuaţiile $(4), (5)$ exprimă exact faptul că funcţiile φ şi $\ln A$ sunt armonice conjugate. Din $(*)$ avem:

$$\ln A = w + \frac{1}{2}\ln\Delta w.$$

Punctul (ii) urmăreşte articolul:

Amato, F., *Sulle superficie minime e le metriche isoterme*, Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci. (5), 60(1974), 36-42.

7.45 (i) Deoarece g este constantă rezultă $\Gamma^k_{ij} = 0, 1 \le i, j, k \le 2$ şi deci ecuaţia Gauss devine: $\det b = 1 = 0$, fals.

(ii) Un calcul imediat, folosind formulele de la ex. 7.37, dă: $\Gamma^1_{11} = \frac{u^1}{1+(u^1)^2}$ şi toţi ceilalţi simboli Christoffel sunt nuli. Ecuaţia Gauss devine: $\det b = u^1 = 0$, fals.

7.46 Fie $g = (g_{ij} =< \overline{r}_i, \overline{r}_j >)_{1\le i,j\le 2}$ forma I-a fundamentală şi $g^{-1} = \left(g^{ij}\right)_{1\le i,j\le 2}$ matricea inversa. Fie $\left(b_{ij} =< \overline{r}_{ij}, \overline{N} >\right)_{1\le i,j\le 2}$ forma a II-a fundamentală şi $\left(b^k_i = g^{ka}b_{ai}\right)_{1\le i,k\le 2}$ contracţia cu g^{-1}. Fie $\left(\Gamma^k_{ij}\right)_{1\le i,j,k\le 2}$ simbolii Christoffel, a se vedea ex. 7.37.

Prin derivarea în raport cu u^i a relaţiei $<\overline{N},\overline{N}>=1$ rezultă că vectorul $\overline{N}_i$ este perpendicular pe $\overline{N}$ deci $\overline{N}_i$ nu are componentă pe direcţia lui $\overline{N}$. Derivând în raport cu u^i relaţia $<\overline{N},\overline{r}_k>=0$ rezultă $<\overline{N}_i,\overline{r}_a>=-<\overline{N},\overline{r}_{ai}>=-b_{ai}$. Notând $\overline{N}_i=A_i^k\overline{r}_k$ rezultă prin înmulţirea scalară cu $\overline{r}_a$ că $A_i^k g_{ka}=-b_{ai}$ deci $A_i^k=-b_i^k$ şi în concluzie avem ecuaţia Weingarten.

Relativ la ecuaţia Gauss faptul că b_{ij} este coeficientul lui $\overline{r}_{ij}$ în direcţia lui $\overline{N}$ rezultă din definiţia formei a II-a fundamentale ţinând cont de faptul că $\overline{N}$ este versor. Fie deci relaţia $\overline{r}_{ij}=\Gamma_{ij}^k\overline{r}_k+b_{ij}\overline{N}$ şi să arătam că Γ_{ij}^k sunt exact coeficienţii Christoffel. Înmulţind scalar ultima relaţie cu $\overline{r}_a$ rezultă $\Gamma_{ij}^k g_{ka}=<\overline{r}_{ij},\overline{r}_a>$. Derivând în raport cu u^j relaţia $<\overline{r}_i,\overline{r}_a>=g_{ia}$ şi ţinând cont de ultima relaţie rezultă:

$$\Gamma_{ij}^k g_{ka}+\Gamma_{ja}^k g_{ki}=g_{ia,j}$$

relaţie în care permutând circular indicii $i\to j, j\to a, a\to i$ mai obţinem:

$$\Gamma_{ja}^k g_{ki}+\Gamma_{ai}^k g_{kj}=g_{ji,a}$$

$$-\Gamma_{ai}^k g_{kj}-\Gamma_{ij}^k g_{ka}=-g_{aj,i}$$

; adunând ultimele 3 relaţii, ţinând cont de simetria în indicii inferiori ai lui g şi Γ, rezultă:

$$2\Gamma_{ja}^k g_{ki}=g_{ia,j}+g_{ji,a}-g_{ja,i}$$

sau încă:

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}g^{ka}\left(g_{aj,i}+g_{ia,j}-g_{ij,a}\right)$$

relaţia de definiţie a simbolilor Christoffel.

O scriere mai compacta a ecuaţiilor Gauss-Weingarten este:

$$\frac{\partial}{\partial u^i}\begin{pmatrix}\overline{r}_1\\ \overline{r}_2\\ \overline{N}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\Gamma_{i1}^1 & \Gamma_{i1}^2 & b_{i1}\\ \Gamma_{i2}^1 & \Gamma_{i2}^2 & b_{i2}\\ -b_i^1 & -b_i^2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{r}_1\\ \overline{r}_2\\ \overline{N}\end{pmatrix}.$$

7.47 Folosim notaţiile de la exerciţiul anterior. Fie deci curba $c:u^i=u^i(s)$, presupusă parametrizată canonic.Vectorul tangent este: $\frac{d}{ds}\overline{r}\circ c(s)=\overline{r}_i(c(s))\frac{du^i}{ds}(s)$. Vectorul acceleraţie este:

$$\frac{d^2}{ds^2}\overline{r}\circ c(s)=\overline{r}_k(c(s))\frac{d^2u^k}{ds^2}(s)+\overline{r}_{ij}(c(s))\frac{du^i}{ds}(s)\frac{du^j}{ds}(s)=$$

$$=\left(b_{ij}\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right)\overline{N}+\left(\frac{d^2u^k}{ds^2}+\Gamma_{ij}^k\frac{du^i}{ds}\frac{du^j}{ds}\right)\overline{r}_k$$

de unde rezultă ecuaţia geodezicelor

$$\frac{d^2u^k}{ds^2}(s) + \Gamma_{ij}^k\left(u^1(s), u^2(s)\right)\frac{du^i}{ds}(s)\frac{du^j}{ds}(s) = 0.$$

CAPITOLUL 8

Probleme de geometrie date la examenul de licenţă

Notă: Aceste probleme au fost date la Facultatea de Matematică a Universitāţii "Al. I. Cuza" din Iaşi.

Iunie 2004

1) Se cer ecuaţiile canonice ale dreptei δ care trece prin punctul $M_0\,(1,-1,3)$, este paralelă cu planul $\pi : x-2y+z+7=0$ şi este concurentă cu dreapta $d : \frac{x-2}{3}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-1}{1}$.

2) Forma I-a fundamentalā a unei suprafeţe. Lungimi, unghiuri şi arii pe o suprafaţă.

Februarie 2004

1) Se dau vectorii $v_1=(2,1,3)\,, v_2=(0,2,1)\,, v_3=(2,3,0)$.

(i) Să se arate că $B=\{v_1,v_2,v_3\}$ este o bază în $\mathbb{R}^3$.

(ii) Se cere matricea schimbării de baze de la B la baza canonică.

(iii) Se cer coordonatele vectorului $v=(5,3,7)$ în baza B.

2) (i) Să se arate că ecuaţia $x^2+2xy+4y^2-4y=0$ reprezintă o elipsă şi să se determine diametrul ei conjugat direcţiei $(-1,1)$.

(ii) Să se arate că în familia de plane $\pi_\lambda : \lambda x+2y-4z-1=0, \lambda$ parametru real, există un unic plan perpendicular pe planul $\pi : x+y+z-1=0$ ce se cere determinat.

3) Forma I-a fundamentală a unei suprafeţe. Lungimea unei curbe pe o suprafaţă.

Iunie 2003

1) Fie suprafaţa $S : \overline{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, u+v), (u,v) \in I\!R^2$. Să se arate că:

(i) planele tangente la curba $v = v_0$ =constant pe S formează un fascicol. Se cere planul din fascicol perpendicular pe planul $\pi : z = 0$.

(ii) curba de ecuaţie $u = u_0$ =constant pe S are curbura şi torsiunea constantă.

2) Spaţii punctual euclidiene, distanţa între două puncte, unghiuri, repere ortonormale.

Februarie 2003

1) Se dā planul $\pi : 6x + 2y - 9z + 121 = 0$ şi punctul $M(-12, -4, 18)$.

(i) Se cer coordonatele punctului M' simetricul lui M faţă de π şi să se arate că M' aparţine fiecărei conici din familia de conice $\Gamma_\lambda : x^2 + 2\lambda y^2 - x + y = 0, \lambda$ parametru real.

(ii) Discutaţi după parametrul λ natura conicelor din familia dată.

(iii) Să se reprezinte grafic conicele $\lambda = \frac{1}{2}, \lambda = -\frac{1}{2}$.

2) Se dă suprafaţa $S : \overline{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, hv)$, h parametru real pozitiv.

(i) Se cer punctele lui S în care planul tangent este paralel cu vectorul $\overline{v} = (1,1,1)$ şi arătaţi că aceste puncte aparţin curbei $C : \overline{r}(t) = \left(\frac{h}{2}(1 + \cos 2t - \sin 2t), \frac{h}{2}(-1 + \cos 2t + \sin 2t), ht\right)$.

(ii) Să se arate că C are curbura şi torsiunea constantă.

3) Spaţii afine. Subspaţii afine, intersecţii şi uniuni.

****